

Numerik I

8. Übung

Aufgabe 8.1 (2 Punkte)

Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung der Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie den Rang der Matrizen A_1 und A_2 .

Aufgabe 8.2

Gegeben seien der Vektor $b := (2, 4)^\top$, die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

sowie das Problem: Suche $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$ mit $A\tilde{x} = b$ und $\|\tilde{x}\|_2 \stackrel{!}{=} \min$.

Lösen Sie das Problem einmal durch Zeichnung (Lösungshyperebene von $Ax = b$, Minimalabstand von $(0, 0)^\top$) und zum anderen durch explizite Berechnung mit Hilfe der Pseudo-Inversen A^+ von A .

Aufgabe 8.3 (4 Punkte)

Kreuzen Sie die richtige Antwort an.

- (a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische und positiv definite Matrix. Ist dann die Gauß-Elimination ohne Pivotierung durchführbar?

- Ja
 Nein

- (b) Es sei eine LR -Zerlegung der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben. Welcher Schritt zum Lösen eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ hat einen höheren numerischen Aufwand?

- Vorwärtseinsetzen
 Rückwärtseinsetzen

- (c) Welches der folgenden Zerlegungsverfahren ist numerisch stabiler?
- QR -Zerlegung mit Householder
 - Singulärwertzerlegung
- (d) Ist die Frobenius-Norm im Allgemeinen eine natürliche Matrixnorm?
- Ja
 - Nein
- (e) Für welche Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt $\text{cond}_1(A) = \text{cond}_\infty(A)$?
- A regulär
 - A positiv definit
- (f) Im Rahmen einer LR -Zerlegung der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ soll der $\text{rang}(A)$ bestimmt werden. Welche Pivotierung muss dazu im Allgemeinen angewendet werden?
- Spaltenpivotierung
 - Spalten- und Zeilenpivotierung
- (g) Es sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $n \geq m$ und $\text{rang}(A) = m$ gegeben. Ist die Matrix $A^\top A$ dann regulär?
- Ja
 - Nein
- (h) Welche Fehlerart wird mittels Nachiteration verbessert?
- Unvermeidbarer Fehler
 - Numerischer Rundungsfehler

Aufgabe 8.4

Gegeben sei das Polynom

$$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p(x) = x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 2x - 1.$$

- (a) Zeigen Sie mittels des Horner-Schemas, dass $x = 1$ eine Nullstelle von p ist.
- (b) Benutzen Sie die Ergebnisse aus Teil (i), um mit Hilfe des Horner-Schemas die Ableitungen $p'(1)$ und $p''(1)$ zu berechnen. Ist $x = 1$ eine einfache Nullstelle von p ?

Abgabe: Mittwoch, den 02.12.2009 bis 12 Uhr.