Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Dr. (USA) M. Charina
AR Dipl. Math. A. Rademacher

2. Dezember 2009

Numerik I

9. Übung

Aufgabe 9.1

Sei $\mathcal{P}_n$ der Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich n:

$$\mathcal{P}_n := \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, a_j \in \mathbb{R},\ j = 0, \ldots, n\}$$

Weiter seien $L_k^{(n)}$ die sog. Lagrangeschen Grundpolynome zu den Stützstellen x_j, $j = 0, \ldots, n$:

$$L_k^{(n)}(x) := \prod_{j=0, j \neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \quad k = 0, \ldots, n$$

(i) Zeigen Sie, dass

$$L_k^{(n)}(x_i) = \delta_{ki} := \begin{cases} 1 & \text{, falls } k = i \\ 0 & \text{, falls } k \neq i \end{cases}$$

gilt.

(ii) Beweisen Sie, dass $\{L_k^{(n)},\ k = 0, \ldots, n\}$ eine Basis von $\mathcal{P}_n$ bilden.

Aufgabe 9.2 (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^6 - x^4 + 3x - 2$.

(i) Skizzieren Sie die Lagrangeschen Grundpolynome $L_k^{(4)}$, $k = 0, \ldots, 4$, und bestimmen Sie das Interpolationspolynom p_4 in der Lagrange-Form zu f in den Stützstellen $x_0 = -4$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ und $x_4 = 5$. Skizzieren Sie dann p_4 und f. (Für die Erstellung der Skizzen können Sie ein Computerprogramm, z.B. Matlab, benutzen.)

(ii) Schätzen Sie den Interpolationsfehler für $x \in [-1, 1]$ zuerst mittels Satz 4.3.9.1 und dann mittels Satz 4.3.9.4 ab.

(iii) Geben Sie das Interpolationspolynom p_6 zu f in beliebigen Stützstellen an.

Aufgabe 9.3 (2 Punkte)

Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Berechnen Sie das Interpolationspolynom p_3 zu f in den Stützstellen $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{2}$ und $x_3 = 2$ zuerst mit dem Schema der dividierten Differenzen und dann mit dem Neville-Aitken-Schema.

Aufgabe 9.4

(i) Bei fest gewählten Stützstellen $x_k \in [a,b]$, $k = 0, \ldots, n$ definieren wir den Interpolationsoperator I_n durch

$$I_n : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathcal{P}_n, \quad I_n(y_0, \ldots, y_n) := \sum_{k=0}^{n} y_k L_k^{(n)}$$

Zeigen Sie, dass I_n linear und durch

$$\|I_n\| := \max_{\|y\|_\infty = 1} \|I_n(y)\|_\infty = \|L^{(n)}\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |L^{(n)}(x)|$$

beschränkt ist. Dabei bezeichnet $L^{(n)}$ die sog. Lebesgue-Funktion

$$L^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} |L_k^{(n)}(x)|.$$

Die Lebesgue-Konstante $\Lambda_n := \|L^{(n)}\|_\infty$ hat also die Bedeutung der Operatornorm von I_n.

(ii) Berechnen Sie Λ_n auf dem Intervall $[-1,1]$ für $n = 5, 10, 15, 20$ bzgl. den äquidistanten Stützstellen $\bar{x}_k$ mit $\bar{x}_0 = -1$ und $\bar{x}_n = 1$ sowie den Tschebyscheff-Stützstellen

$$\hat{x}_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right).$$

Abgabe: Mittwoch, den 09.12.2009 bis 12 Uhr.