Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Dr. (USA) M. Charina
AR Dipl. Math. A. Rademacher

16. Dezember 2009

Numerik I

11. Übung

Aufgabe 11.1

Erweitern Sie die in Aufgabe 10.1 geschriebenen Programme um die Spline-Interpolation. Benutzen Sie dazu die methode `spline` von Matlab. Vergleichen Sie anschließend die Resultate der Spline-Interpolation bzgl. der Funktionen f_1, f_2 und f_3 mit den Resultaten, die Sie in Aufgabe 10.1 bzgl. der Methoden `myNeville` und `interp1` erhalten haben.

Aufgabe 11.2 (3 Punkte)

$S_3(X)$ bezeichne den Vektorraum der kubischen natürlichen Splines auf der Zerlegung X, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$, auf $[0, 2]$.

(i) Sind die folgenden Funktionen in $S_3(X)$?

  (a) $f(x) = x^3 - x^2$,

  (b) $f(x) = (x-1)_+^3 - \frac{x^3}{2}$.

(ii) Bestimmen Sie alle 5-tupel $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$, so dass die Funktion

$$s(x) := a \cdot (x)_+^3 + b \cdot (x-1)^3 + c \cdot (x-2)_+^3 + d \cdot x + e$$

in $S_3(X)$ ist.

(iii) Bestimmen Sie die stückweise polynomiale Form des interpolierenden Splines $s \in S_3(X)$ für $f(x) = x^3$. Wie lautet das Ergebnis, wenn die natürlichen Randbedingungen durch $s''(x_0) = f''(x_0)$, $s''(x_2) = f''(x_2)$ ersetzt werden?

Aufgabe 11.3

Sei $\{x_0 + ih\}_{i \in \mathbb{Z}}$ eine äquidistante Knotenfolge mit Schrittweite $h > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

(i) Bestimmen Sie die stückweise polynomiale Form des quadratischen normalisierten B-Splines $B_{0,3}$ und verifizieren Sie die Symmetrie-Eigenschaft $B_{0,3}(x_0 + x) = B_{0,3}(x_3 - x)$.

(ii) Zeigen Sie die „Shiftinvarianz“-Eigenschaft $B_{i,3}(x) = B_{0,3}(x - ih)$, $i \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 11.4 (3 Punkte)

Für $m \geq 0$, $n \geq 1$, betrachte die $m + n$ Funktionen

$$x^i, \quad i = 0, \ldots, m, \qquad (x_j - x)_+^m, \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

Zeigen Sie folgendes:

(i) Diese Funktionen sind Elemente des Raumes $S_m(X)$.

(ii) Diese Funktionen sind linear unabhängig.

(iii) Diese Funktionen bilden eine Basis des Raumes $S_m(X)$.

Abgabe: Mittwoch, den 05.01.2010 bis 12 Uhr.

Frohe Feiertage und einen guten Rutsch ins neue Jahr!