Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Dr. (USA) M. Charina
AR Dipl. Math. A. Rademacher

13. Januar 2010

Numerik I

13. Übung

Aufgabe 13.1 (4 Punkte)

Sei U ein unitärer Raum. Die beste Approximation (Orthogonalprojektion) $s^\star \in S$ auf einen endlich dimensionalen Teilraum $S \subset U$, der eine Basis $\phi_1, \ldots, \phi_n$ besitzt, wird mit Hilfe der Gramschen Matrix

$$A = (a_{k\ell})_{k,\ell=1,\ldots,n}, \quad a_{k\ell} = (\phi_k, \phi_\ell),$$

bestimmt.

(i) Zeigen Sie:

(a) A ist hermitesch.

(b) A ist positiv definit.

(c) Die Orthogonalprojektion $s^\star$ von $f \in U$ auf S ist

$$s^\star = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot v_k$$

mit dem Koeffizientenvektor $c = (c_1, \ldots, c_n)^\top$, der die Lösung des Gleichungssystems $Ac = b = (b_1, \ldots, b_n)^\top$ mit $b_\ell = (s, \phi_\ell)$ ist.

(ii) Als Basis des Teilraums $S = \mathcal{P}_2$ der Polynome vom Grad ≤ 2 in $C[0,1]$ wählen wir die Polynome

$$\phi_\ell : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad \phi_\ell(x) = x^{\ell-1}, \quad \ell = 1, 2, 3.$$

Stellen Sie die Gramsche Matrix zu dieser Basis auf. Berechnen Sie damit die beste Approximation $s^\star \in S$ von

$$f : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin \pi x.$$

Aufgabe 13.2 (2 Punkte)

Es bezeichne $\tilde{C}^1[0,1]$ den (unendlichdimensionalen) Vektorraum der stetigen Funktionen, deren Ableitungen stückweise stetig mit endlich vielen Sprungstellen sind. Weiter sei

$$U := \{f \in \tilde{C}^1[0,1] \ : \ f(0) = f(1) = 0\}.$$

Auf U ist durch die Vorschrift

$$(f,g) = \int_0^1 f'(x) g'(x)\, dx$$

eine Abbildung $(\cdot,\cdot) : U \times U \to \mathbb{R}$ definiert.

(i) Zeigen Sie, dass $(\cdot,\cdot)$ auf U ein Skalarprodukt ist.

(ii) Das Intervall $[0,1]$ sei in n gleichlange Teilintervalle unterteilt,

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1, \quad x_i = ih,\ h = \frac{1}{n},\ i = 0,\dots,n.$$

Gesucht ist die beste Approximation einer Funktion $u \in U$ bezüglich $(\cdot,\cdot)$ im (endlichdimensionalen) Raum $S_1(X) \subset U$ der linearen Spline-Funktionen. Geben Sie die Form des linearen Gleichungssystems an, durch welches die beste Approximation bestimmt ist. Verwenden Sie dazu die Orthogonalitätsbedingung aus Satz 4.7.2.2 der Vorlesung und benutzen Sie die linearen B-Splines als Basis von $S_1(X)$.

Aufgabe 13.3

Bestimmen Sie die beste Approximation $s^\star \in \mathcal{P}_3[-1,1]$ zur Funktion $f(x) = e^x \in C[-1,1]$ bzgl. des Skalarprodukts $(f,s^\star) = \int_{-1}^{1} f(x)s^\star(x)\,dx$. (Somit wird $s^\star$ mit Hilfe der Legendre-Polynome bestimmt.)

Aufgabe 13.4

Es sei $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ und $S := \{a + bx^2 \mid a,b \in \mathbb{R}\} \subset C[0,1]$.

(i) Zeigen Sie, dass S die Haarsche Bedingung auf $[0,1]$ erfüllt.

(ii) Bestimmen Sie ein $h_0 \in S$ und ein Extremum $\xi \in (0,1)$ der Fehlerfunktion, so dass gilt:

$$(f-h_0)(0) = -(f-h_0)(\xi) = (f-h_0)(1).$$

Abgabe: Mittwoch, den 20.01.2010 bis 12 Uhr.