Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Dr. (USA) M. Charina
AR Dipl. Math. A. Rademacher

20. Januar 2010

Numerik I

14. Übung

Aufgabe 14.1

(i) Es sei $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ und $S := \{a + bx^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subset C[0,1]$. Zeigen Sie: h_0 ist die beste Tschebyscheff-Approximation in S an f. Hinweis: Benutzen Sie die Resultate aus Aufgabe 13.4.

(ii) Es sei $P : C[-1,1] \to \mathcal{P}_1$ die Abbildung, die jedem $f \in C[-1,1]$ seine beste Tschebyscheff-Approximation zuordnet. Zeigen Sie, dass P i.A. nicht linear ist.

Aufgabe 14.2

(i) Beweisen Sie, dass für die Trapezregel die Fehlerdarstellung

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] + \int_a^b \frac{1}{2}(x-a)(x-b)f''(x)\,dx$$

gilt und folgern Sie daraus die Fehlerdarstellung aus der Vorlesung.

(ii) Folgern Sie aus der ersten Fehlerdarstellung die Abschätzung

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] \right| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \int_a^b |f''(x)|\,dx.$$

(iii) Zur Verbesserung der Genauigkeit werde das Intervall $[a,b]$ in n gleichgroße Teilintervalle mit der Breite $h := (b-a)/n$ unterteilt. Wenden Sie die Trapezregel auf jedem der Teilintervalle an und benutzen Sie die Fehlerabschätzung aus (ii) zur Herleitung einer Abschätzung für den Gesamtfehler dieser ,,summierten Trapezregel". Leiten Sie eine zweite Fehlerabschätzung mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Abschätzung (angewandt auf jedes Teilintervall) her. Welche Fehlerabschätzung ist vorzuziehen?

Aufgabe 14.3

Wieviele Funktionsauswertungen sind zur Berechnung des Integrals

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+2x}\,dx$$

mit einem Fehler kleiner als 10^{-8} notwendig?

(i) mit Hilfe der summierten Trapezregel

(ii) mit Hilfe der summierten Simpson-Regel

Aufgabe 14.4

Es sei eine Quadraturformel mit der Darstellung

$$I_2(f) := \alpha f(0) + \beta f\left(\frac{1}{2}\right) + \gamma f(1)$$

für die Annäherung von $\int_0^1 f(x)\,dx$ gegeben. Bestimmen Sie die Konstanten α, β, γ so, dass die Ordnung dieser Formel so hoch wie möglich ist.

Abgabe: Mittwoch, den 27.01.2010 bis 12 Uhr.