

Numerik I

15. Übung

Aufgabe 15.1

- (i) Bestimmen Sie für $n = 2$ die Knoten und Gewichte der Gauß-Legendre-Quadraturformel auf dem Intervall $[-1, 1]$.
- (ii) Bestimmen Sie eine Gaußsche Quadraturformel, die das Integral $\int_{-1}^1 f(x)\sqrt{|x|} dx$ für alle Polynome aus \mathcal{P}_3 exakt integriert.
- (iii) Geben Sie eine Gauß-Tschebyscheff-Quadraturformel zur Berechnung des Integrals

$$\int_{-1}^1 \frac{\cos(\pi x/2)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

mit einem Fehler $\leq 10^{-4}$ an.

Aufgabe 15.2

- (i) Zeigen Sie, dass die zweite Spalte des Romberg-Schemas der summierten Simpson-Regel entspricht.
- (ii) Bestimmen Sie eine Näherung für den Wert des Integrals $\int_0^1 (\sin(\sqrt{x}) - \sqrt{x}) dx$, indem Sie mit dem Romberg-Verfahren $a_{3,3}$ zur Schrittweitenfolge $h_i = 2^{-i-1}$, $i = 0, 1, 2, \dots$ berechnen.
- (iii) Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\pi/2} \sin(x) dx$ mit Hilfe des Romberg-Verfahrens (Schrittweitenfolge $h_i = 2^{-i-1}\pi$, $i = 0, 1, 2, \dots$) mit einem Fehler $\leq 10^{-4}$. Kontrollieren Sie die Genauigkeit mit dem aus der Vorlesung bekannten Abbruchkriterium für Extrapolationsverfahren (Bemerkung 4.4.4).