Hausaufgaben, Blatt 11

H1 $f(x,y,z) = z^3 + z + xy - 1$ (*)

a+b) Die partiellen Ableitungen lauten:

$$f_x(x,y,z) = y \qquad f_{xx}(x,y,z) = 0, \quad f_{xy}(x,y,z) = f_{yx}(x,y,z) = 1$$
$$f_y(x,y,z) = x \qquad f_{yy}(x,y,z) = 0$$
$$f_z(x,y,z) = 3z^2 + 1 \qquad f_{zz}(x,y,z) = 6z$$

Offensichtlich gilt überall $f_z > 0$, also insb. $f_z \neq 0$.

Satz über impl. Fkt'en $\Rightarrow$ Die Lösungsmenge der Gl'ung $f(x,y,z) = 0$ ist in einer Umgebung jeder gegebenen Lösung (x_0, y_0, z_0) gegeben durch den Graphen einer diff'baren Fkt. $z = g(x,y)$:

$(f \in C^\infty \Rightarrow g \in C^\infty)$

Da $h(z) = z^3 + z$ str. mon. wachs., $h'(z) > 0 \ \forall z$
$\Rightarrow z = h^{-1}(z^3+z) = h^{-1}(1-xy) =: g(x,y)$
mit $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eind. reelle Lsg. von (*).

d) Kettenregel + $f(x,y,z) = 0 \Rightarrow$

$$f_x + f_z \cdot g_x = 0 \qquad \text{I}$$
$$f_y + f_z \cdot g_y = 0 \qquad \text{II}$$

$$\Rightarrow \nabla g(x,y) = \left(-\frac{f_x}{f_z}(x,y), -\frac{f_y}{f_z}(x,y)\right)$$

$$\nabla g(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{y}{3z^2+1} = 0 \\ -\dfrac{x}{3z^2+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x, y = 0$$

$\Rightarrow (0,0)$ ist ein kritischer Punkt

Kettenregel + I $\Rightarrow$

$$f_{xx} + f_{xz} \cdot g_x + (f_{zx} + f_{zz} \cdot g_x) g_x + f_z \cdot g_{xx} = 0$$

$$\Rightarrow g_{xx} = -\frac{f_{xx} + 2 f_{xz} \cdot g_x - f_{zz} \cdot g_x^2}{f_z}$$

$$g_{xx}(0,0) = -\frac{0 + 0 - 6z \cdot 0}{6z} = 0$$

Analog: $g_{xy}(0,0) = g_{yx}(0,0) = g_{yy}(0,0) = 0 \Rightarrow$ keine Aussage.

$\Rightarrow$ Betrachte die Niveaulinien!

Entwickle g um $(h_1,h_2)\neq(0,0)$ mit Taylor-Polynom 1 Grades: in der Stelle $(0,0)$:

$$g(0,0) = g(h_1,h_2) + g_x(h_1,h_2)(0-h_1) + g_y(h_1,h_2)\cdot(0-h_2) + o(\|(-h_1,-h_2)\|)$$

$$= g(h_1,h_2) + \frac{h_2}{3g^2(h_1,h_2)+1}\cdot h_1 + \frac{h_1}{3g^2(h_1,h_2)+1}\cdot h_2 + o(\|(h_1,h_2)\|)$$

$$\Leftrightarrow g(h_1,h_2) - g(0,0) = -\frac{h_2}{3g(h_1,h_2)^2+1}\cdot h_1 - \frac{h_1}{3g(h_1,h_2)^2+1}\cdot h_2 + o(\|(h_1,h_2)\|)$$

$$= \underbrace{\frac{-2}{3\cdot g(h_1,h_2)^2+1}}_{<0}\cdot h_1h_2 + \underbrace{o(\|(h_1,h_2)\|)}_{\xrightarrow{(h_1,h_2)\to 0} 0}$$

D.h. in einer kleinen Umgebung $U\subseteq\mathbb{R}^2$ von $(0,0)$ exist. $(h_1,h_2),(\tilde h_1,\tilde h_2)\in U$ so, daß $g(h_1,h_2)>g(0,0)$ und $g(\tilde h_1,\tilde h_2)<g(0,0)$.

$\Rightarrow g$ hat in $(0,0)$ ein Sattelpunkt

(c)

$$\nabla g(1,1) = \left(-\frac{1}{3z^2+1}, -\frac{1}{3z^2+1}\right) \text{ mit } z \text{ Lsg. von:}$$

$$z^3+z+1-1=0 \Leftrightarrow z(\underbrace{z^2+1}_{>0})=0 \Rightarrow z=0.$$

$$\Rightarrow \nabla g(1,1) = (-1,-1)$$

(H2)

$$f_1(x,y,u,v) = x^2+y^2-u^2-v^2=0$$
$$f_2(x,y,u,v) = x^2+2y^2+3u^2+4v^2-1=0 \Bigg\} *$$

Beh: In Umgebung von $\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$ $\exists$ C^1-Abb. $u=g_1(x,y)$, $v=g_2(x,y)$ mit $\begin{cases} g_1\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{5} \\ g_2\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{5} \end{cases}$

Setze $f(x,y,u,v) := \begin{pmatrix} f_1(x,y,u,v) \\ f_2(x,y,u,v) \end{pmatrix}$. $f \in C^2(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$

$$f\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right) = \begin{pmatrix} 1/25 \cdot (1+4-4-1) \\ 1/25\,(1+8+12+4-25) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$J_f(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x,y,u,v) \\ \nabla f_2(x,y,u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2u & -2v \\ 2x & 4y & 6u & 8v \end{pmatrix}$$

$$J_f\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right) = \begin{pmatrix} 2/5 & 4/5 & -4/5 & -2/5 \\ 2/5 & 8/5 & 12/5 & 8/5 \end{pmatrix} \Rightarrow J_{u,v}\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right) = \begin{pmatrix} -4/5 & -2/5 \\ 12/5 & 8/5 \end{pmatrix}$$

Da $\det J_{u,v}\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right) = \det\begin{pmatrix} -4/5 & -2/5 \\ 12/5 & 8/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\cdot(-32+24) = -\frac{8}{25} \neq 0$,

ist durch die Gl'ung $(*)$ in einer Umgebung von $(x,y)=(1/5, 2/5)$ Fkt'en $u=g_1(x,y)$, $v=g_2(x,y)$ mit

$g_1\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{5}$ und $g_2\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{5}$ definiert

(folgt aus Satz 22.3 (implizite Fkt'en).

(H3) $E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1$ <u>und</u> $x+y+z=1\}$

(a) E ist kompakt

$E = E_1 \cap E_2$ mit

- $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1\} = f_1^{-1}(\{1\})$ abgeschlossen, da $f_1(x,y) = x^2+y^2$ stetig

- $E_2 = f_2^{-1}(\{1\})$ abg., mit $f_2(x,y,z) = x+y+z$.

<u>und</u> aus $x^2+y^2=1$ folgt: $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases}$ (*)

$$\Rightarrow \quad x+y+z = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad -2 \le z-1 \le 2$$
$$\Leftrightarrow \quad -1 \le z \le 3 \quad (**)$$

$\Rightarrow E = \underbrace{E_1 \cap E_2}_{\text{abg.}} \subseteq [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,3]$, d.h. beschränkt.

$\Rightarrow$ E ist kompakt.

(b) betrachte Quadrat der Abstandsfkt. zw. E und $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 : E \to [0,\infty)$

Da E kompakt ist und f stetig ist, nimmt f ihr Minimum und Maximum auf E an!

Setze $g_1(x,y,z) = x^2+y^2-1$
$g_2(x,y,z) = x+y+z-1$, $g(x,y,z) := \begin{pmatrix} g_1(x,y,z) \\ g_2(x,y,z) \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

stetig diff'bar

$$dg(x,y,z) = \begin{pmatrix} \nabla g_1(x,y,z) \\ \nabla g_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Für $x=y=0$ hat dg nicht den vollen Rang,

aber $(0,0,z) \notin E$,

$$\nabla f(x,y,z) = (2(x-1),\ 2(y-1),\ 2(z-1))$$

(L) $\nabla f(x,y,z) = \lambda_1 \cdot \nabla g_1(x,y,z) + \lambda_2 \cdot \nabla g_2(x,y,z)$ und $g(x,y,z) = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(x-1) = \lambda_1 \cdot 2x + \lambda_2 & \mathrm{I} \\ 2(y-1) = \lambda_1 \cdot 2y + \lambda_2 & \mathrm{II} \\ 2(z-1) = \lambda_2 & \mathrm{III} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{I} \Rightarrow 2x-2 = \lambda_1 2x + \lambda_2 \\ \quad \Leftrightarrow x(2-2\lambda_1) = \lambda_2 + 2 \\ \mathrm{II} \Rightarrow 2y-2 = 2\lambda_1 y + \lambda_2 \\ \quad \Leftrightarrow y(2-2\lambda_1) = \lambda_2 + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x = y \ \underline{\text{oder}} \ \{\lambda_1 = 1 \text{ und } \lambda_2 = -2\}$$

$\mathrm{III} \Rightarrow 2z - 2 = \lambda_2 \Leftrightarrow 2z = \lambda_2 + 2$

<u>1. Fall</u>: $\lambda_1 = 1 \wedge \lambda_2 = -2$

$\mathrm{III} \Rightarrow z = 0$

$g_2(x,y,0) = 1 \Rightarrow y = 1-x \overset{g_1(x,y,z)=0}{\Longrightarrow} x^2 + (1-x)^2 = 1$

$\Rightarrow x^2 + 1 - 2x + x^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow 2x(x-1) = 0$

$\Rightarrow x = 0 \vee x = 1$
$\quad y = 1 \quad\ \ y = 0$

kritische Stellen: $(0,1,0), (1,0,0)$

Einsetzen in f:

$$f(0,1,0) = 2$$

$$f(1,0,0) = 2$$

<u>2. Fall:</u> $x = y$

$g_1(x,y,z) = 0 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

$g_2(x,y,z) = 0 \Rightarrow z_{1,2} = 1 - 2x_{1,2} \Rightarrow z_1 = 1 - \sqrt{2}\,, \; z_2 = 1 + \sqrt{2}$

kritische Stellen: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\sqrt{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\sqrt{2}\right)$

Einsetzen in f:

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\sqrt{2}\right) = 2\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(1+\sqrt{2}-1\right)^2 = \left(4-2\sqrt{2}\right)^2 + 2$$

$$= 16 - 16\sqrt{2} + 8 + 2 = 26 - 16\sqrt{2} \approx 3{,}37$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\sqrt{2}\right) = 2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(1+\sqrt{2}-1\right)^2 =$$

$$= \left(4+2\sqrt{2}\right)^2 + 2 = 16 + 16\sqrt{2} + 8 + 2 = 26 + 16\sqrt{2} \approx 48{,}63$$

$\Rightarrow$ Minimalen Abstand haben Punkte $(0,1,0), (1,0,0)$

Maximalen Abstand hat Punkt $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\sqrt{2}\right)$

H4 Extrema von $f(x,y) = x \cdot y$ unter der

Nebenbedingung: $g(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $a,b > 0$. (*)

(a) $\nabla g(x,y) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}\right)$ hat Rang 1 für $(x,y) \neq (0,0)$,

ist jedoch keine Einschränkung, da $(0,0)$ <u>nicht</u> die Nebenbdg. erfüllt.

Lagrange-ansatz:

$$\nabla f(x,y) = \lambda \cdot \nabla g(x,y) \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (y,x) = \lambda \cdot \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{ya^2}{2x} = \frac{xb^2}{2y}$$ (hier $x,y \neq 0$, sonst $\lightning$ zu $(x,y) \neq (0,0)$.)

$$\Leftrightarrow 2y^2a^2 = 2x^2b^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} \overset{(*)}{=} 1 - \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{2} = \frac{y^2}{b^2}$$

kritische Stellen: $\left(\pm \frac{a}{\sqrt{2}}, \pm \frac{b}{\sqrt{2}}\right), \left(\pm \frac{a}{\sqrt{2}}, \mp \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$

Funktionswerte:

$$f\left(\pm \frac{a}{\sqrt{2}}, \pm \frac{b}{\sqrt{2}}\right) = \frac{ab}{2}$$

$$f\left(\pm \frac{\sqrt{a}}{2}, \mp \frac{b}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{ab}{2}$$

$\Rightarrow f$ besitzt in $\left(\pm \frac{a}{\sqrt{2}}, \pm \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ (glob.) Maxima,

und in $\left(\pm \frac{a}{\sqrt{2}}, \mp \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ (glob.) Minima.

(b) <u>Parametrisierung der NB.</u>

$$\gamma(t) = (a \cdot \cos t, b \cdot \sin t) \quad , t \in [0, 2\pi)$$

$$\Rightarrow f(\gamma(t)) = ab \cdot \cos t \cdot \sin t =: h(t)$$

$$h'(t) = ab(-\sin^2 t + \cos^2 t) \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 t = \sin^2 t$$

$\Leftrightarrow |\cos t| = |\sin t| \quad , \; t \in [0, 2\pi)$

$\Rightarrow t \in \{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \}$

Funktionswerte:

$h(\frac{\pi}{4}) = h(\frac{5\pi}{4}) = \frac{ab}{2}$

$h(\frac{3\pi}{4}) = h(\frac{7\pi}{4}) = -\frac{ab}{2}$

<u>Also</u>: f besitzt in $\gamma(\frac{\pi}{4}) = (\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$ und $\gamma(\frac{5\pi}{4}) = (-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}})$ glob. Max. <u>und</u> in $\gamma(\frac{3\pi}{4}) = (-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$ und $\gamma(\frac{7\pi}{4}) = (\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}})$ glob. Minimum.

$\square$