

# Stochastik I

## Blatt 3

Abgabe: Donnerstag, 06.05.2010, bis 12 Uhr in die Briefkästen

---

### Aufgabe 11:

An einer Übung nehmen  $n$  Studierende teil. Dabei vergessen diese, die Blätter mit dem jeweiligen Namen zu versehen. Die Rückgabe erfolgt daraufhin rein zufällig.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass keiner der Studenten sein eigenes Blatt erhält (mit Begründung!).
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) Studenten ihr eigenes Blatt erhalten (Begründung)?

### Aufgabe 12:

- Konstruieren Sie mithilfe des in der Vorlesung vorgestellten Verfahrens ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbf{P}$  auf  $([0, 1], \mathfrak{B}[0, 1])$  welches folgende Eigenschaften erfüllt:
  - $\mathbf{P}((a, b]) = b - a$  für alle  $0 \leq a \leq b \leq 1/2$ .
  - $\mathbf{P}(\{3/4\}) = 1/2$

- Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{P}(A) = \lambda\left(\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap A\right) + \frac{1}{2} \cdot \delta_{3/4}(A)$$

gilt.

### Aufgabe 13:

- Finden Sie einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbf{P})$  derart, dass die Abbildung  $\mathbf{P} : \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  surjektiv ist (mit Begründung).
- Sei  $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \mathbf{P})$  ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum mit  $p_n := \mathbf{P}(\{n\}) > 0$ . Muss der Wertebereich der obigen Abbildung  $\mathbf{P}$  die gesamte Menge  $[0, 1]$  sein? Begründen Sie Ihre Aussage.

**Aufgabe 14:**

Sie lassen ein Anti-Viren-Programm auf Ihrem Rechner laufen. Ist der Rechner infiziert, so wird dies mit einer Wahrscheinlichkeit  $p_1 = 0.995$  erkannt. Ist der Rechner nicht infiziert, so wird dies mit einer Wahrscheinlichkeit von  $p_2 = 0.99$  erkannt (d.h. auch wenn der Rechner nicht infiziert ist, wird in einem Prozent der Fälle eine Warnung ausgegeben). Aus allgemeinen Beobachtungen heraus ist davon auszugehen, dass ihr Rechner mit einer Wahrscheinlichkeit  $p_3 = 0.002$  infiziert ist.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommen Sie eine Virenwarnung?
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Rechner infiziert, wenn Sie eine Virenwarnung bekommen?

**Aufgabe 15\*:**

Ein Student schlägt folgenden Ansatz vor, um ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf einer überabzählbaren Menge  $\Omega$  zu definieren: 'Wir ordnen einfach jedem Punkt  $\omega \in \Omega$  eine positive Wahrscheinlichkeit zu'. Wie viele Punkte mit echt positiver ( $> 0$ ) Wahrscheinlichkeit kann es höchstens geben und warum?