Kapitel V: Bilineare Räume

5.1 Kapitel (V.1): Bilinearformen

5.1.1 Vorbemerkungen

Bilineare Räume sind Räume mit einer Bilinearform.
Objekt = (Vektorraum, Bilnearform)
Hauptbeispiele (kennen wir bereits): $(\mathbb{R}^2$**, Skalarprodukt**$)$, $(\mathbb{R}^3$**, Skalarptrodukt**$)$
Bekannt: Das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$: $\sum\limits_{i=1}^{n} x_1 \cdot y_1$ **mißt den Abstand zweier Punkte.**

Für den Euklidischen Abstand gilt: $\mathbf{d}(P,Q) = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \right\rangle}$

Das Skalarprodukt ist ein Beispiel für eine lineare Abbildung. $\langle \cdot \rangle$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

(i) **linear in jedem Argument**

(ii) **symmetrisch:** $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

Uns ist zudem eine multilineare Abbildung bekannt:

$$\underbrace{\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \ldots \times \mathbb{K}^n}_{n\textbf{-mal}} \to \mathbb{K}\textbf{:} \quad \mathbf{det}\,(\cdot) \; \textbf{ als Funktion der Spaltenvektoren}$$

Wir haben bereits gezeigt:

(i) **Die Determinate ist linear in jedem Element**

(ii) **nicht symmetrisch, sondern alternierend. Für** $i \neq j$**:**

$$\mathbf{det}\begin{pmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & v_i & \cdots & v_j & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{pmatrix} = -\mathbf{det}\begin{pmatrix} & \uparrow & & \uparrow & \\ \cdots & v_j & \cdots & v_i & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & \end{pmatrix}$$

Behauptung: Sei $\sigma \in \mathbf{S}_n$**. Dann:**

$$\mathbf{det}\left(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(n)}\right) = \mathbf{sgn}\,(\sigma) \cdot \mathbf{det}\,(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

Beweisskizze: $\mathbf{det}\left(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(n)}\right) = \alpha(\sigma) \cdot \alpha(\tau) \cdot \mathbf{det}\,(v_1, v_2, \ldots, v_2)$.
Wir wissen: $\alpha(\sigma) \cdot \alpha(\tau) = \alpha(\sigma\tau) = \alpha(\tau) \cdot \alpha(\sigma)$, $\alpha\,(\textbf{Transposition}) = -1$
$\Rightarrow \quad \mathbf{S}_n = \langle \textbf{Transpositionen} \rangle \quad \Rightarrow$ **Behauptung.**

5.1.2 Definition (V.5.a): Bilinearform

$\mathbf{V}, \mathbf{W}$ **seien** $\mathbb{K}$**-Vektorräume.**
Dann heißt $s : \mathbf{V} \times \mathbf{W} \to \mathbb{K}$ **bilineare Abbildung beziehungsweise Bilinearform, wenn folgendes gilt:**

(i) **Linearität im ersten Argument:** $\forall \alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$, $\forall v,\, v' \in \mathbf{V}$, $\forall w \in \mathbf{W}$ **gilt:**

$$s\,(\alpha \cdot v + \alpha' \cdot v',\, w) = \alpha \cdot s\,(v,\, w) + \alpha' \cdot s\,(v',\, w)$$

(ii) **Linearität im zweiten Argument.** $\forall \beta, \beta' \in \mathbb{K}$, $\forall v \in \mathbf{V}$, $\forall w,\, w' \in \mathbf{W}$ **gilt:**

$$s\,(v,\, \beta \cdot w + \beta' \cdot w') = \beta \cdot s\,(v,\, w) + \beta' \cdot s\,(v,\, w')$$

Als alternative Formulierung, obiger Eigenschaften, hier eine Kurzfassung:
$\forall w$: $s\,(\cdot,\, w)$: $\mathbf{V} \to \mathbb{K}$ **linear,** $\forall v$: $s\,(v, \cdot)$: $\mathbf{W} \to \mathbb{K}$ **linear.**

5.1.3 Beispiele für Bilinearformen

(a) Der Dualraum: $\mathbf{V}$, $\mathbf{W} = \mathbf{V}^* = \mathbf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}, \mathbb{K})$. Zur Erinnerung:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{V} \times \mathbf{V}^* & \to & \mathbb{K} \\ (x, \lambda) & \mapsto & \lambda(x) \end{array}$$

Um zu zeigen, daß der Dualraum eine Bilinearform ist müssen wir die Linearität im ersten und zweiten Argument nachweisen:

Zu (i): $(\cdot, \lambda)$ linear nach Definition von $\mathbf{V}^*$ (siehe Definition Dualraum $(3.1.9)$)

Zu (ii): $\lambda \mapsto \lambda(x)$ linear in λ nach Definition der Vektorraumstruktur auf $\mathbf{V}^*$

(b) Ein Beispiel aus der Analysis: $\mathbf{V} = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig$\}$

Behauptung: $\mathbf{V}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum:

Aus f, g stetig folgt: $\alpha \cdot f$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ beziehungsweise $f \circ g$ stetig (siehe Analysis)

Behauptung: $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{V}) = \infty$ (Nicht endlich dimensional)

Zum Beispiel: $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \hookrightarrow & \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f|_{[a,b]} \end{array}$ **für $a < b$.**

Nun definieren wir ein Skalarprodukt für Funktionen:

$$\mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}, \quad (f, g) \mapsto \int_a^b f(t) \cdot g(t)\ \mathbf{d}t$$

Die Linearität im ersten und zweiten Argument ist leicht zu zeigen:

Addition:

$$(f + f', g) \mapsto \int_a^b (f + f') \cdot g\,\mathbf{d}t = \int_a^b (f \cdot g + f' \cdot g)\ \mathbf{d}t = \int_a^b f \cdot g\,\mathbf{d}t + \int_a^b f' \cdot g\,\mathbf{d}t = (f, g) + (f', g)$$

Skalare Multiplikation:

$$(\alpha \cdot f, g) \mapsto \int_a^b (\alpha \cdot f) \cdot g\,\mathbf{d}t = \int_a^b \alpha \cdot (f \cdot g)\ \mathbf{d}t = \alpha \cdot \int_a^b f \cdot g\,\mathbf{d}t = \alpha \cdot (f, g)$$

Anmerkung (wird in der Analysis behandelt, daher hier nicht von so großer Bedeutung): $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ liefert einen wichtigen metrischen Raum:

$$\mathbf{d}(f, g) := \sqrt{\int_a^b (f - g)^2\ \mathbf{d}t}$$

Der Abstand zweier Funktionen ist Null, wenn sie identisch sind. Ein anderes Beispiel für zwei Funktionen mit Abstand Null ist:

$$f = c, \qquad g = \begin{cases} c & x \neq x_0 \\ d & x = x_0 \end{cases} \qquad \textbf{für } c \neq d$$

Für $x \neq x_0$ sind die Funktionen identisch, ansonsten $(x = x_0)$ unterscheiden sie sich nur in einem Punkt.

(c) Sei $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$. Es sei gegeben:

$$(x, y) \quad \mapsto \quad x^T \cdot A \cdot y = (x_1, \ldots, x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1, \ldots, x_n) \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right)$$

Für die i-te Stelle von x gilt nun: $x_i \cdot A \cdot y = x_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot y_j \right)$**. Damit erhalten wir:**

$$(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot y_j \right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot y_j$$

(d) Nun wollen wir einen Spezialfall von (c) betrachten: Sei $A = \mathbf{E}_n$. Es folgt:

$$\langle x, y \rangle := x^T \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

Wir erhalten das aus der Schule bekannte Skalarprodukt. Das Skalarprodukt ist unsere "Standard"-Bilinearform auf dem $\mathbb{K}^n$.
Wir wollen nun (c) ebenfalls als Skalarprodukt interpretieren und vereinbaren die folgende Notation:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle := \begin{cases} \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} \\ (x,\, y) \mapsto \langle x, Ay \rangle = x^T \cdot A \cdot y \end{cases}$$

Eigenschaften einer Bilinearform über einen Endomorphismus

5.1.4 Definition (V.1.b): symmetrische, alternierende Bilinearfom

$\mathbf{V}, \mathbf{W}$ seien $\mathbb{K}$-Vektorräume und sei $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ (Bilinearform über einem Endomorphismus). Dann definieren wir:

(i) Eine Form heißt symmetrische Bilinearform, wenn gilt:

$$\forall v, w \in \mathbf{V}: \; s(v, w) = s(w, v)$$

(ii) Eine Form heißt alternierende Bilinearform, wenn gilt:

$$\forall v \in \mathbf{V}: \; s(v, v) = 0$$

Falls $\operatorname{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ können wir eine äquivalente Bedingung formulieren:

$$\forall v \in \mathbf{V}: \; s(v, v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall v, w \in \mathbf{V}: \; s(v, w) = -s(w, v)$$

5.1.5 Definition (V.1.c): positiv-definiet beziehungsweise positiv-semidefiniet

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ seien $\mathbb{K}$-Vektorräume.

(i) Eine Bilinearform ist positiv-definiet, wenn $\forall v \in \mathbf{V}$ gilt: $s(v, v) \gneqq 0$

(ii) Eine Bilinearform ist positiv-semidefiniet, wenn $\forall v \in \mathbf{V}$ gilt: $s(v, v) \geq 0$

5.1.6 Beispiele für symmetrische, alternierende beziehungsweise positiv-definiete, positiv-semidefiniete Bilinearformen

Wir werden einige der Beispiele aus (5.1.3) **weiter untersuchen:**

Zu b) Leicht zu sehen: Bilinearform ist symmterisch und positiv-semidefiniet

$$\Rightarrow \quad s(f,f) = \int_a^b f^2 \,\mathbf{d}t \geq 0$$

Behauptung: Obige Billinearform ist auch positiv-definiet.

Zu Zeigen: Sei f **stetig und** $\int_a^b f^2 \,\mathbf{d}t = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0$

Beweis:

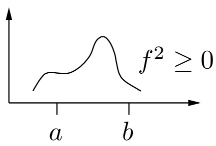

Abbildung V-1: Skizze

Sei etwa $f^2(c) > 0$ **mit** $c \in [a,b]$**.**

$$\Rightarrow \quad f^2(d) > 0 \textbf{ auf } (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f^2 \,\mathbf{d}t \geq \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f^2 \,\mathbf{d}t \geq \min_{(c-\varepsilon,c+\varepsilon)} \left(f^2\right) \cdot 2\varepsilon > 0$$

Es folgt die Behauptung.

Zu d) Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ **ist diese Bilinearform symmetrisch und positiv-definiet (gezeigt in** (1.3.2) **Norm eines Vektors).**

<u>Eine symmetrische positiv definiete Bilinearform wird als Skalarprodukt bezeichnet</u>. Standardskalarprodukt:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i, \qquad \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Zu c) Sei $n = 2$ **und** A **gegeben mit** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$**. Nun gilt:**

$$\langle x, Ay \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2$$

Die Bilinearform ist also symmetrisch. Ist sie auch positiv-semidefiniet. Nein, denn $\langle \mathrm{e}_2, A\mathrm{e}_2 \rangle = -1$**. Damit kann die Bilinearform natürlich auch nicht positiv definiet sein.**

5.1.7 Zur Erinnerung: Orthogonalität und Skalarprodukt

Im $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Es gilt: $u \perp v \quad \Leftrightarrow \quad \langle u, v\rangle = 0$.
Den Winkel zwischen u und v können wir folgendermaßen bestimmen:

$$\cos\measuredangle(u,v) = \frac{\langle u, v\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} \quad \textbf{wobei} \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

(Als Erinnerung an (**I**.3.1)**)**

5.1.8 Definition (V.1.d): Orthogonalität (verallgemeinert)

Sei $s : \mathbf{V}\times\mathbf{W} \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Wir definieren:

$$v \perp w \quad \Leftrightarrow \quad s(v,w) = 0$$

In diesem Fall sind u und v orthogonal zueinander.

5.1.9 Definition (V.1.e): linkes und rechtes Radikal l-Rad(s), r-Rad(s)

Gegeben $s : \mathbf{V}\times\mathbf{W} \to \mathbb{K}$ Bilinearform. Wir definieren:

(i) **l-Rad**$(s) := \{v \in \mathbf{V} | \, v \perp \mathbf{W}\} \quad \Leftrightarrow \quad s(v,w) = 0 \quad \forall w \in \mathbf{W}$

(ii) **r-Rad**$(s) := \{w \in \mathbf{W} | \, \mathbf{V} \perp w\} \quad \Leftrightarrow \quad s(v,w) = 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}$

Anmerkung: Ist die Bilinearform symmetrisch, dann: l-Rad(s) = **r-Rad**(s)

5.1.10 Definition (V.1.f): ausgeartete Bilinearform

s **heißt nicht ausgeartet, wenn l-Rad**(s) = **r-Rad**$(s) = \{0\}$
Bemerkung: $0_{\mathbf{V}} \in$ **l-Rad**(s), $0_{\mathbf{W}} \in$ **r-Rad**(s), **denn** $s(0,w) = 0\,\forall w \in \mathbf{W}$, $s(v,0) = 0\,\forall v \in \mathbf{V}$.

5.1.11 Beispiele zu linken und rechtem Radikal

Zu (5.1.3) **a)** $\mathbf{V}\times\mathbf{V}^*$, $(x,\lambda) \mapsto \lambda(x)$,
Behauptung:

$$\textbf{l-Rad} = \{x | \forall\lambda \in \mathbf{V}^* : \lambda(x) = 0\} = \{0\},$$

denn zu jedem $x \neq 0\,\exists\lambda : \mathbf{V} \to \mathbb{K}$ **mit** $\lambda(x) = 1$.
Beweis: Ergänze $x = v_1$ **zu einer Basis** $v_1, v_2, \ldots, v_n$ **von V. Definiere** λ **wie folgt:**

$$x \mapsto 1, \qquad v_2, v_3, \ldots, v_n \mapsto \textbf{ irgendwohin}, \qquad \left[\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda(v_i)\right]$$

Es gilt gemäß der Definition der Nullabbildung:

$$\textbf{r-Rad} = \{\lambda \in \mathbf{V}^* | \forall x \in \mathbf{V} : \lambda(x) = 0\} = \{0\}$$

Zu (5.1.3) **b)** $(f,g) \mapsto \int_a^b f \cdot g \, \mathrm{d}t$

Da diese Bilinearform symmetrisch ist gilt: l-Rad = r-Rad. Weiter:

$$\textbf{l-Rad} = \left\{ f \in \mathcal{C}\left([a,b], \mathbb{R}\right) \middle| \, \forall g: \, g \ \textbf{ stetig: } \ g:[a,b] \to \mathbb{R} \ \textbf{ gilt: } \ \int_a^b f \cdot g \, \mathrm{d}t = 0 \right\} = \{0\}$$

denn insbesondere muß gelten: $\int_a^b f^2 \, \mathrm{d}t = 0$. **Bereits in** (5.1.7) **gezeigt:** $\Rightarrow \quad f \equiv 0$

Nun noch ein zusätzliches Beispiel:

(e) Sei s **gegeben mit:** $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $s\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$

Es gilt:

$$\textbf{l-Rad} = \textbf{r-Rad} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, \forall y_1, y_2, y_3 : \, x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}\mathbf{e}_3$$

Bei dieser Punktmenge handelt es sich um die z**-Achse.**

5.1.12 Beschreibung durch Matrizen: $s : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{K}$

Hinführung:

(a) $\varphi : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, **Matrizen über Basisauswahl:** $\varphi(v_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \cdot w_i$

(b) $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{K}$, **Wähle Basis** $\mathfrak{A}$ **von V:** $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot v_i$. **Dann:**

$$s(v,w) = s\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot v_i, \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot v_j\right) \overset{(*)}{=} \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \cdot \beta_j \cdot s(v_i, v_j)$$

Anmerkung: $(*)$ **folgt aus der Bilinearität von** s.

5.1.13 Definition (V.1.g): Matrix von s bezüglich Basis $\mathfrak{A}$

Sei $\mathfrak{A}$ **Basis von V und** s **eine Bilinearform:** $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{K}$. **Dann definieren wir**

$$\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s) := \left(s(v_i, v_j)_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}) \right)$$

als die Matrix von s **bezüglich der Basis** $\mathfrak{A}$.

5.1.14 Vorbemerkungen: $\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)$ legt s fest

Es gilt (wie oben):

$$s(v,w) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \cdot \beta_j \cdot s(v_i, v_j)$$

Hier dieselbe Aussage als Matrizentheoretische Formulierung;

$$v = \sum_{i=1}^n x_i \cdot v_i \quad \leftrightarrow \quad (x_1, \ldots, x_n), \qquad w = \sum_{j=1}^n y_j \cdot v_j \quad \leftrightarrow \quad (y_1, \ldots, y_n)$$

Dann gilt:

$$s(v,w) = (x_1,\ldots,x_n)\cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)\cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} s(v,w) &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i\cdot y_j\cdot s(v_i,v_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} s(v_i,v_j)\cdot y_j\right)}_{i\textbf{-te Koordinate}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i\cdot \left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)\cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right)_i = (x_1,\ldots,x_n)\cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}\cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5.1.15 Satz (V.1.1) Symmetriesätze

Sei $\dim(\mathbf{V}) = n$ und sei $\mathfrak{A}$ eine Basis von V. Dann gelten folgende Aussagen:

(i) Die Zuordnung $s \mapsto \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}$ ist eine Bijektion zwischen der Menge der Bilinearformen auf V und $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$

(ii) s symmetrisch $\Leftrightarrow$ $\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)$ symmetrisch $\left(\Leftrightarrow \quad \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s) = \left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)\right)^T\right)$

(iii) Wenn s symmetrisch, dann

$$\textbf{l-Rad}(s) = \textbf{r-Rad}(s) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i\cdot v_i \,\middle|\, \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Im Übertragenen Sinn: l-Rad(s) = r-Rad(s) $\leftrightarrow$ Kern $\left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)\right)$ (Zu $(*)$: Mit der 0 wird klarerweise ein Vektor beschrieben)

(iv) s ist nicht ausgeartet $\Leftrightarrow$ $\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)$ ist regulär

Beweise:

Zu (i): Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ beliebig.

Zu zeigen: Es existiert eine Bilinearform s auf V mit $\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s) = A$ (Surjektivität) und s ist durch A eindeutig bestimmt (Injektivität).

Eindeutigkeit: Notwendig gilt:

$$s\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot v_i, \sum_{i=1}^{n} y_i\cdot v_i\right) = \underbrace{(x_1,\ldots,x_n)\cdot A\cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{(*)}$$

Also ist s eindeutigt bestimmt, weil zu jedem $v \in \mathbf{V}$, eindeutig bestimmte $x_i \in \mathbb{K}$ mit $v = x_1\cdot v_1 + \ldots + x_n\cdot v_n$ existieren, also ist s injektiv.

<u>Existenz</u>: Zu zeigen ist: die durch $(*)$ definierte Abbildung ist wirklich eine Bilinearform:

(i) Bild $(s) \subseteq \mathbb{K}$ **klar**

(ii) Linearität im ersten und zweiten Argument:

Seien $v, v', w, w' \in \mathbf{V}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ **wobei**

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i, \quad v' = \sum_{i=1}^{n} x'_i \cdot v_i, \quad w = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i, \quad w' = \sum_{i=1}^{n} y'_i \cdot v_i$$

Dann ist:

$$\begin{aligned}
s(\lambda \cdot v + v', w) &\overset{\textbf{Def.}}{=} (\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) + (x'_1, \ldots, x'_n)) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
&\overset{\textbf{Distr.}}{=} \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + (x'_1, \ldots, x'_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
&\overset{\textbf{Def.}}{=} \lambda \cdot s(v, w) + s(v', w)
\end{aligned}$$

Analog zeigen wir die Linearität im zweiten Argument:

$$s(v, \mu \cdot w + w') = \mu \cdot s(v, w) + s(v, w')$$

Also ist s surjektiv und somit bijektiv (die Injektivität haben wir zuvor gezeigt).

Zu (ii)**:**
"$\Rightarrow$" Sei s symmetrisch $\quad \Rightarrow \quad s(v_i, v_j) = s(v_j, v_i) \ \forall i, j$
$\Rightarrow \quad \left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)\right)_{ij} = \left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)\right)_{ji} \ \forall i, j \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)$ **ist symmetrisch.**
"$\Leftarrow$" Sei $\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)$ symmetrisch

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad s\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i, \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i\right) &= \underbrace{(x_1, \ldots, x_n) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{K}} \\
&= \left((x_1, \ldots, x_n) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right)^T \\
&= (y_1, \ldots, y_n) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = s\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i, \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i\right)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad s$ **ist symmetrisch.**

Zu (iii): Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Rad}\,(s) &= \left\{ v \in \mathbf{V} \middle| \, s\,(v,w) = 0 \ \forall \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \right\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \middle| \, s\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i, \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i \right) = 0 \ \forall \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \right\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \middle| \, (x_1, \ldots, x_n) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}\,(s) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0 \ \forall \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \right\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \middle| \, (x_1, \ldots, x_n) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}\,(s) = (0, \ldots, 0) \right\} \\
&\overset{(*)}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \middle| \, \mathbf{M}^{\mathfrak{A}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Anmerkung: $(*)$ folgt aus der Symmetrie von s

Zu (iv): Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{l\text{-}Rad}\,(s) &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \middle| \, (x_1, \ldots, x_n) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}\,(s) = (0, \ldots, 0) \right\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \middle| \, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{Kern}\left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}\,(s)\right) \right\}
\end{aligned}$$

Analog:

$$\mathbf{r\text{-}Rad}\,(s) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i \middle| \, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{Kern}\left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}\,(s)\right) \right\}$$

s **nicht ausgeartet** $\quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{l\text{-}Rad}\,(s) = \mathbf{r\text{-}Rad}\,(s) = \{0\}$

$\Leftrightarrow \quad \mathbf{Kern}\left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}\,(s)\right) = \mathbf{Kern}\left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}\,(s)\right)^T = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}\,(s)$ **ist regulär.**

5.1.16 Bemerkung zu Satz (V.1.1)

Der Satz besagt unter anderem, daß man den allgemeinen Fall einer Bilinearform s auf einem n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $\mathfrak{A}$ reduzieren kann. $\mathbf{V} = \mathbb{K}^n$, für $\tilde{s} : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ erhalten wir:

$$\tilde{s}(x, y) = x^T \cdot A \cdot y = \langle x, Ay \rangle \qquad \langle x, Ay \rangle = \sum x_i A y_i$$

Vergleiche dazu die Theorie der linearen Abbildungen: Seien $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ n beziehungsweise m-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\mathfrak{A} = (v_1, \dots, v_n)$ als Basis von $\mathbf{V}$ und $\mathfrak{B} = (w_1, \dots, w_n)$ als Basis von $\mathbf{W}$. Dann:

$$\varphi_{\mathfrak{A}} : \mathbb{K}^n \to \mathbf{V} \qquad \varphi_{\mathfrak{A}}(v_1, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i$$

$$\varphi_{\mathfrak{B}} : \mathbb{K}^m \to \mathbf{W} \qquad \varphi_{\mathfrak{B}}(w_1, \dots, w_m) = \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot v_i$$

Sei $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ lineare Abbildung. Dann existiert genau eine Matrix

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(f) \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

so daß folgendes Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V} \arrow[r, "f"] & \mathbf{W} \\
\mathbb{K}^n \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{A}}"] \arrow[r, "\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(\mathrm{f})"'] \arrow[ur, phantom, "/\!/\!/"] & \mathbb{K}^m \arrow[u, "\varphi_{\mathfrak{B}}"']
\end{tikzcd}$$

Abbildung V-2: Kommutatives Diagramm

5.1.17 Satz (V.1.2): Basiswechsel für Bilinearformen

Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ Basen von $\mathbf{V}$ und sei s eine Bilinearform auf $\mathbf{V}$ und $\mathbf{T} = \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}$ die Transformationsmatrix. Dann gilt:

$$\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s) = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{B}}(s) \cdot \mathbf{T}$$

Vergleiche: Sei $f \in \mathbf{End}(\mathbf{V})$. Alaso:

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f) = \underbrace{\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}}(\mathbf{id})}_{(*)} \cdot \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f) \cdot \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(\mathbf{id})$$

wobei $(*) = \left(\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(\mathbf{id})\right)^{-1}$
<u>Beweis</u>: Sei $\mathfrak{A} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathfrak{B} = (w_1, \dots, w_m)$. Es gilt:

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i \cdot v_i, \qquad w = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot w_i = \sum_{i=1}^{n} y'_i \cdot w_i$$

und

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \textbf{und} \quad \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Damit:

$$\begin{aligned}
s(v,w) &= s\left(\sum_{i=1}^{n} x_i' \cdot v_i, \sum_{i=1}^{n} y_i' \cdot w_i\right) = (x_1',\ldots,x_n') \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{B}}(s) \cdot \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} \\
&= \left[\mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right]^T \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{B}}(s) \cdot \left[\mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right] \\
&= (x_1,\ldots,x_n) \cdot \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{B}}(s) \cdot \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
&= (x_1,\ldots,x_n) \cdot \left(\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{B}}(s) \cdot \mathbf{T}\right) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = s\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i, \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot w_i\right)
\end{aligned}$$

Aus der Eindeutigkeit von $\mathrm{M}^{\mathfrak{A}}(s)$ folgt: $\mathrm{M}^{\mathfrak{A}}(s) = \mathbf{T}^T \cdot \mathrm{M}^{\mathfrak{B}}(s) \cdot \mathbf{T}$

5.1.18 Definition (V.1.h): Kongruenz zweier Matrizen

Seien $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$
Zwei Matrizen $A, B \in \mathbf{Sym}(n,\mathbb{K})$ heißen kongruent, wenn ein $\mathbf{S} \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$ existiert mit

$$B = \mathbf{S}^T \cdot A \cdot \mathbf{S}$$

Bahauptung: Die Kongruenz zweier Matrizen ist eine Äquivalenzrelation.
Beweis: Wir müssen folgende Eigenschaften nachweise:

(i) Reflexivität

(ii) Symmetrie

(iii) Transitivität

Zu (i): Setze $\mathbf{S} = \mathbf{E}_n \quad \Rightarrow \quad$ Behauptung.
Zu (ii): Sei $\mathbf{S} \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$ mit $B = \mathbf{S}^T \cdot A \cdot \mathbf{S}$. Dann:

$$A = \left(\mathbf{S}^T\right)^{-1} \cdot B \cdot \mathbf{S}^{-1} = \left(\mathbf{S}^{-1}\right)^T \cdot B \cdot \mathbf{S}^{-1}$$

Wir wissen: $\mathbf{S}^{-1} \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{K}) \quad \Rightarrow \quad$ Behauptung.
Zu (iii): Seien $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2 \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$ mit $B = \mathbf{S}_1^T \cdot A \cdot \mathbf{S}_1$ und $C = \mathbf{S}_2^T \cdot B \cdot \mathbf{S}_2$. Dann:

$$C = \mathbf{S}_2^T \cdot \left(\mathbf{S}_1^T \cdot A \cdot \mathbf{S}_1\right) \cdot \mathbf{S}_2 = \left(\mathbf{S}_2^T \cdot \mathbf{S}_1^T\right) \cdot A \cdot (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2) = (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2)^T \cdot A \cdot (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2)$$

Wir wissen: $(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2) \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$, da $\mathbf{GL}(n,\mathbb{K})$ Gruppe $\quad \Rightarrow \quad$ Behauptung.

5.2 Kapitel (V.2): Orthogonalbasen

5.2.1 Zur Erinnerung

Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$: $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$

Zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ stehen senkrecht aufeinander, wenn gilt:

$$\langle x, y\rangle = 0$$

Die Verallgemeinerung des Skalarproduktes auf symmetrische Bilinearformen über einem Vektorraum V liefert damit die folgende Definition:

5.2.2 Definition (V.2.a): Orthogonalität, Orthogonalraum

Sei s symmetrische Bilinearform auf V, $\mathbf{U} < \mathbf{V}$ und $u, v \in \mathbf{V}$. Wir definieren:

(i) $u \perp v$ **(in Worten: u orthogonal zu v), wenn gilt** $s(u,v) = 0$

(ii) $\mathbf{U}^{\perp} = \{v \in \mathbf{V} | \, s(u,v) = 0 \ \forall u \in \mathbf{U}\}$

Bemerkungen:
(a) $\mathbf{U}^{\perp} < \mathbf{V}$, $\mathbf{U}^{\perp} = \mathbf{Rad}(s)$ **wobei**

$$\mathbf{U}^{\perp} = \{v \in \mathbf{V} | \, s(w,v) = 0 \ \forall w \in \mathbf{V}\}$$

(b) $\mathbf{U} \perp \mathbf{U}$ **ist möglich. Zum Beispiel:**
Sei $\mathbf{V} = \mathbb{K}^2$ **und** $s((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2$.
Dann ist $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle^{\perp}$**, denn**

$$s((\lambda,\lambda),(y_1,y_2)) = \lambda \cdot y_1 - \lambda \cdot y_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = y_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \textbf{für } \lambda \neq 0$$

Aber: $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle^{\perp}$**, denn**

$$s\langle(\lambda,0),(y_1,y_2)\rangle = \lambda \cdot y_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \textbf{für } \lambda \neq 0$$

5.2.3 Definition (V.2.b): Orthogonale Zerlegung

Sei s symmetris che Bilinearform auf V. Wir definieren:
$\mathbf{V} = \mathbf{U}_1 \perp \mathbf{U}_2 \perp \ldots \perp \mathbf{U}_r$ **ist eine Zerlegung von V als direkte Summe**

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}_1 \oplus \mathbf{U}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{U}_r$$

mit der zusätzlichen Eigenschaft $s(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j) = 0$ **für** $i \neq j$ **- Kurzfassung:** $\mathbf{U}_i \perp \mathbf{U}_j$.

5.2.4 Beispiel für eine orthogonale Zerlegung

Sei $\mathbf{V} = \mathbb{K}^2$ und sei s symmetrische Bilinearform mit

$$s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2$$

Es ist $\mathbb{K}^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \perp \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$**, denn** $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cap \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \{0\}$**.**
Zudem: $s((\lambda, 0), (0, \mu)) = 0 \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

5.2.5 Satz (V.2.1): Abspaltung des Radikals

Sei s eine symmetrische Bilinearform auf V und U sei ein Komplement von Rad (s), das heißt $\mathbf{V} = \mathbf{Rad}(s) \oplus \mathbf{U}$. Dann gilt:

(i) $\mathbf{V} = \mathbf{Rad}(s) \perp \mathbf{U}$

(ii) $s|_{\mathbf{U}}$ **ist nicht ausgeartet**

Beweis: Siehe Aufgabe $(35 - \mathbf{LinAII})$

5.2.6 Definition (V.2.c): Orthogonalbasis

V sei ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum (mit char($\mathbb{K} \neq 2$) und s eine symmetrische Bilinearform auf V. Eine Basis $\mathfrak{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V heißt Orthogonalbasis, wenn gilt: $v_i \perp v_j$ für $i \neq j$.
Mit anderen Worten: $\mathbf{V} = \langle v_1 \rangle \perp \langle v_2 \rangle \perp \ldots \perp \langle v_n \rangle$

5.2.7 Satz (V.2.2): Existenz von Orthogonalbasen

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit char $(\mathbb{K}) \neq 2$ und sei s eine symmetrische Bilinearform auf V.
Dann besitzt V eine Orthogonalbasis.
Zum Beweis benötigen wir das folgende Abspaltungslemma.

5.2.8 Lemma (V.2.3): Abspaltungslemma

Sei $\dim(\mathbf{V}) = n < \infty$, $\mathbf{U} < \mathbf{V}$ und $\dim(\mathbf{U}) = r$. Dann gilt:

(i) $\dim\left(\mathbf{U}^{\perp}\right) \geq n - r$

(ii) Ist $s|_{\mathbf{U}}$ **nicht ausgeartet, so gilt:** $\mathbf{V} = \mathbf{U} \perp \mathbf{U}^{\perp}$

Beweis:

Zu (i): Sei $\mathfrak{A}_1 = (v_1, \ldots, v_r)$ Basis von U. Wir ergänzen $\mathfrak{A}_1$ zu einer Basis

$$\mathfrak{A} = (v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n) \quad \textbf{von V}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^{\perp} &= \{v \in \mathbf{V} | \, s(u,v) = 0 \, \forall u \in \mathbf{U}\} \\
&= \left\{ \sum x_i \cdot v_i \middle| \, s\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i, \sum_{i=1}^{r} y_i \cdot v_i \right) = 0 \, \forall (y_1, \ldots, y_r) \in \mathbb{K}^r \right\} \\
&= \left\{ \sum x_i \cdot v_i \middle| \, (x_1, \ldots, x_n) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \, \forall (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n \right\} \\
&= \left\{ \sum x_i \cdot v_i \middle| \, (x_1, \ldots, x_n) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s) = (0, \ldots, 0, *, \ldots, *) \right\} \qquad (r \ \textbf{Nullen}) \\
&= \left\{ \sum x_i \cdot v_i \middle| \, (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbf{Kern} \left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)_{i,j} \right)_{\substack{i=1,\ldots,r \\ j=1,\ldots,n}} \right\}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad$ **dim** $\left(\mathbf{U}^{\perp}\right) \geq n - r$

Zu (ii): Es ist $\mathbf{U} \cap \mathbf{U}^{\perp} = \mathbf{Rad}\left(s|_{\mathbf{U}}\right) = \{0\}$. Mit (i) folgt die Behauptung.

5.2.9 Beweis zu Satz (V.2.2)

Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach n.

Induktionsanfang: $n = 1$: klar

Induktionsschluß: $(n-1) \rightsquigarrow n$

Wir untersuchen zwei Fälle:

1. Fall: Sei s Nullabbildung $\quad \Rightarrow \quad$ Behauptung (trivial)

2. Fall: Sei s nicht Nullabbildung. Dann existiert ein $v_1 \in \mathbf{V}$ mit $s(v_1, v_i) \neq 0$, denn es existieren $v, w \in \mathbf{V}$ mit $s(v,w) \neq 0$. Ist $s(v,v) = s(w,w) = 0$, so ist

$$\begin{aligned}
s(v+w, v+w) &= s(v,v) + s(w,w) + 2 \cdot s(v,w) \\
&= 2 \cdot s(v,w) \neq 0 \quad \textbf{falls char}\,(\mathbb{K}) \neq 2
\end{aligned}$$

d.h. $s|_{\langle v_i \rangle}$ ist nicht ausgeartet. Nach dem Abspaltungslemma (V.2.3) gilt also:

$\mathbf{V} = \langle v_1 \rangle \perp \langle v_1 \rangle^{\perp}$.

Nach Induktionsvoraussetzung ist $\langle v_1 \rangle^{\perp} = \langle v_2 \rangle \perp \ldots \perp \langle v_n \rangle$.

Also: $\mathbf{V} = \langle v_1 \rangle \perp \langle v_2 \rangle \perp \ldots \perp \langle v_n \rangle$

Bemerkungen:

(a) Der Beweis von Satz (V.2.2) gibt an, wie man die Orthogonalbasis konstruiert.

(b) Ist $\mathfrak{A}$ eine Orthogonalbasis von V, so hat $\mathrm{M}^{\mathfrak{A}}(s)$ Diagonalgestalt.

5.2.10 Satz (V.2.4)

Über einem Körper mit Carakteristik $\neq 2$ ist jede symmetrische Matrix kongruent zu einer Diagonalmatrix.

<u>Beweis</u>: Sei $A \in \mathbf{Sym}(n, \mathbb{K})$, s definiert durch $s(x,y) = x^T \cdot A \cdot y$ ist symmetrische Bilinearform auf dem $\mathbb{K}^n$. Nach Satz (V.2.2) existiert eine Orthogonalbasis $\mathfrak{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ von $\mathbb{K}^n$ bezüglich s:

$$\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s) = \textbf{Diagonalmatrix} = \left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}}(\mathbf{id})\right)^T \cdot \underbrace{A}_{\mathbf{M}^{\mathfrak{B}}(s)} \cdot \left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}}(\mathbf{id})\right)$$

Zur Erinnerung: $\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}}(\mathbf{id}) = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \cdots & v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$

5.2.11 Beispiel für Konstruktion einer Orthogonalbasis

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{Sym}(3, \mathbb{R})$ **und sei s gegeben mit** $s(x,y) = x^T \cdot A \cdot y$.

Da $s(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = s(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = s(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) = 0$ **müssen wir einen anderen Vektor wählen.**

Es gilt:

$$s(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = 2 \cdot s(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 2 \quad \textbf{(siehe Satz (V.2.2))}$$

Also wähle $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$**. Nun wollen wir** $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle^{\perp}$ **bestimmen. Es gilt:**

$$(1,1,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = (1,1,5)$$

Also: $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbf{Kern}(1,1,5) = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle =: \mathbf{U}_1$

Sei $\mathfrak{A}_1 = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$**. Nun betrachte** $s|_{\mathbf{U}_1}$**. Es gilt:**

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{\mathfrak{A}_1}\left(s|_{\mathbf{U}_1}\right) =: \tilde{A}$$

$\tilde{a}_{11} \neq 0$**, wähle** $v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$**. Es folgt analog zu oben:**

$$\mathbf{e}_1 \cdot \begin{pmatrix} -20 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = (-20,\ -4) \rightsquigarrow (5,1)$$

Nun bestimmen wir den Kern und erhaltenm v_3:

$$\mathbf{Kern}(5,\ 1) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle v_2 \rangle^{\perp} \cap \mathbf{U}_1 = \left\langle -\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Setzen wir nun ein, so folgt:

$$s\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = (-1, 5) \cdot \begin{pmatrix} -20 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = -30$$

Damit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(v_1, v_1) & 0 & 0 \\ 0 & s(v_2, v_2) & 0 \\ 0 & 0 & s(v_3, v_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \end{pmatrix}$$

Noch leichter geht es durch simultane Zeilen- und Spaltenumformungen. Jede Spaltenumformung entspricht der Multiplikation einer invertierbaren Matrix S_1 von rechts. Jede Zeilenumformungentspricht einer Multiplikation mit S_1^T von links.
Führt man sämtliche Spaltenumformungen an der Einheitsmatrix durch, so erhält man die Transformationmatrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{25}{2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{25}{2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{23}{2} \end{pmatrix}$$

Analog wenden wir die Operationen auf $\mathbf{E}_3$ an.
Um zu zeigen, daß char $(\mathbb{K}) \neq 2$ sein muß hier ein Gegenbeispiel:
Sei char $(\mathbb{K}) = 2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und eine symmetrische Bilinearform s gegeben mit

$$s(x, y) = (x_1, x_2) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = 2x_1 \cdot x_2 = 0$$

Wäre also A kongruent zu einer Diagonalmatrix B, so wäre $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

5.2.12 Satz $(\mathbf{V}.2.2)'$: Satz $(\mathbf{V}.2.2)$ für char $(\mathbb{K}) = 2$

Sei char $(\mathbb{K}) = 2$, $\mathbf{V}$ ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei s eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbf{V}$.
Dann besitzt $\mathbf{V}$ eine orthogonale Zerlegung:

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}_1 \perp \ldots \perp \mathbf{U}_r \perp \mathbf{W}_1 \perp \ldots \perp \mathbf{W}_s$$

mit dim $(\mathbf{U}_i) = 1$ und dim $(\mathbf{W}_j) = 2$ $\forall i, j$. Ist $\mathbf{W}_j = \langle u, v \rangle$, so ist $s(u, u) = s(v, v) = 0$ und $s(u, v) = 1$.

5.2.13 Satz $(\mathbf{V}.2.4)'$: Satz $(\mathbf{V}.2.4)$ für char $(\mathbb{K}) = 2$

Sei char $(\mathbb{K}) = 2$, $A \in$ Sym $(n, \mathbb{K})$.
Dann: A ist kongruent zu einer Matrix B mit

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & & \\ & \boxed{B_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{B_\lambda} \end{pmatrix} \quad \textbf{wobei} \quad B_i = (\alpha_i) \quad \textbf{oder} \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5.2.14 Definition (V.2.d): quadratische Form

Sei s eine symmetrische Bilinearform auf einem n-dimensionalen Vektorraum V. Dann wird die Abbildung $q : \mathbf{V} \to \mathbb{R}$, $q(v) = s(v, v)$ als die dazugehörige quadratische Form bezeichnet. Es gilt:

$$q(\lambda \cdot v) = \lambda^2 \cdot s(v, v) \quad \textbf{für } \lambda \in \mathbb{K}.$$

5.2.15 Symmetrischer Gauß-Jordan Algorithmus (symmetrische Umformungen)

a) Wir wissen: Die $\mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$ wird erzeugt von Umformungsmatrizen:

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{U}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{U}_r \quad \textbf{wobei} \quad \mathbf{U}_i \ \textbf{Umformungsmatrizen}$$

b) Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^T \cdot A \cdot \mathbf{S} &= (\mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{U}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{U}_r)^T \cdot A \cdot (\mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{U}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{U}_r) \\ &= \mathbf{U}_r^T \cdot \ldots \cdot \mathbf{U}_2^T \cdot \mathbf{U}_1^T \cdot A \cdot \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{U}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{U}_r \\ &= \mathbf{U}_r^T \cdot \ldots \cdot \left(\mathbf{U}_2^T \cdot \left(\mathbf{U}_1^T \cdot A \cdot \mathbf{U}_1\right) \cdot \mathbf{U}_2\right) \cdot \ldots \cdot \mathbf{U}_r \end{aligned}$$

Basisoperationen: Umformungsmatrizen: $A \rightsquigarrow \mathbf{U}^T \cdot A \cdot \mathbf{U}$

Sei U $\leftrightarrow$ Addition des α-fachen einer Zeile beziehungsweise Spalte zu einer anderen Zeile beziehungsweise Spalte. Sei U gegeben mit

$$\mathbf{U} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ \alpha & 1 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \mathbf{E} \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U}^T = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \mathbf{E} \end{array}\right)$$

Für die Multiplikation folgt:

$$\mathbf{U}^T \cdot A \cdot \mathbf{U} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \mathbf{E} \end{array}\right) \cdot \left(\boxed{\alpha_{ij}}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ \alpha & 1 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \mathbf{E} \end{array}\right)$$

Zur Vereinfachung rechnen wir mit symmetrischen (2×2)-Matrizen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a + \alpha b & b + \alpha d \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + 2\alpha b + \alpha^2 d & b + \alpha d \\ b + \alpha d & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wählen wir nun $\alpha = -\dfrac{b}{d}$ für $d \neq 0$, so erhalten wir Diagonalgestalt:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{b}{d} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \frac{b^2}{d} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Ist nun $d = 0$, so formen wir die Matrix um:

Sei $\mathbf{V}_{1,2} \leftrightarrow$ Vertauschung der ersten und zweiten Spalte beziehungsweise Zeile.

In diesem Fall gilt für die Transformationsmatrix: $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T$

Für eine (2×2)-Matrix erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$$

5.2.16 Satz (V.2.5): Gram-Schmidt

Situation: Sei $(\mathbf{V}, s)$ bilinearer Raum, $(v_1, \ldots, v_n)$ Basis mit $s|_{\langle v_1,\ldots,v_k\rangle}$ nicht ausgeartet für $k = 1, \ldots, n$ (Das heißt: $\left(\mathbf{det}\,(s(v_i, v_j))_{i,j\leq k}\right) \neq 0$ für alle $k = 1, \ldots, n$).
Dann existiert eine Orthogonalbasis $w_1, \ldots, w_n$ mit

$$\langle v_1, \ldots, v_n\rangle = \langle w_1, \ldots, w_n\rangle, \qquad \mathbf{det}\left((s(v_i, v_j))_{i,j\leq k}\right) = \prod_{i=1}^{k} s(w_i, w_j)$$

Konsequenz:

$$(s(v_i, v_j))_{i,j\leq k} = \begin{pmatrix} D_k & \\ & \end{pmatrix} \quad \textbf{wobei} \quad D_k \textbf{ der } k-\textbf{te Hauptminor ist}$$

Wir können den k-ten Hauptminoren im diesem Fall folgendermaßen berechnen:

$$D_k = \mathbf{det}\begin{pmatrix} s(v_1, v_1) & \cdots & s(v_1, v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s(v_k, v_1) & \cdots & s(v_k, v_k) \end{pmatrix}$$

Die Voraussetzung bedeutet: Alle Hauptminoren $\neq 0$ und $s(w_k, w_k) = \dfrac{D_k}{D_{k-1}}$
Matrizentheoretische Bedeutung:
Sei A symmterisch, $A = \begin{pmatrix} \boxed{\alpha_{ij}} \end{pmatrix}$ und seien alle Hauptminoren $\neq 0$

$$\Rightarrow \quad A \textbf{ kongruent zu } \begin{pmatrix} \boxed{D_1} & & & \\ & \boxed{\frac{D_2}{D_1}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\frac{D_k}{D_{k-1}}} \end{pmatrix}$$

<u>**Beweis:**</u>
A liefert $s_A : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $(x, y) \mapsto x^T \cdot A \cdot y$, $\mathfrak{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, $\mathbf{M}^{\mathfrak{E}}(s_A) = A$. Satz (V.2.2) liefert Orthogonalbasis $(w_1, \ldots, w_n)$ mit den obigen Eigenschaften.

$$\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s_A) = \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & s(w_k, w_k) & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

$\mathbf{U}_k = \langle v_1, \ldots, v_k\rangle \subseteq \mathbf{U}_{k+1}$, $\dim(\mathbf{U}_k) = k$, $\dim(\mathbf{U}_{k+1}) = k+1$. Nach Voraussetzung sind $\mathbf{U}_k, \mathbf{U}_{k+1}$ nicht ausgeartet.
Abspaltungslemma angewandt auf $\mathbf{U}_{k+1}$, s, $\mathbf{U}_k$ liefert:

$$\mathbf{U}_{k+1} = \mathbf{U}_k \perp \langle w\rangle$$

wobei $\langle w\rangle$ eindimensional nach Voraussetzungen ist.
$w \in \langle u_1, \ldots, u_{k+1}\rangle$, also

$$w = \alpha_1 \cdot u_1 + \ldots + \alpha_k \cdot u_k + \alpha_{k+1} \cdot u_{k+1} = \beta_1 \cdot w_1 + \ldots + \beta_k \cdot w_k + \alpha_{k+1} \cdot u_{k+1}$$

Es gilt: $s(w, w_i) = 0$ **für** $i = 1, \ldots, k$ **und**

$$s(w, u_{k+1}) = s\left(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \cdot v_i, v_{k+1}\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot s(v_i, v_{k+1}) + \alpha_{k+1} \cdot s(v_{k+1}, v_{k+1})$$

$\alpha_{k+1} \neq 0$**, da sonst** $w \in \mathbf{U}_k$**. OE** $\alpha_{k+1} = 1$**. Weitere Rechnungen liefern:**

(i) $w = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{s(w_i, v_{k+1})}{s(w_i, w_i)} \cdot w_i$**, setze** $w_{k+1} = w$
$(\mathbf{V}, s)$ **hat Orthogonalbasis** $(w_1, \ldots, w_n)$**.**
Sei etwa $s(w_i, w_i) = 0,\ i = 1, \ldots, r,\ s(w_j, w_j) \neq 0,\ j = r+1, \ldots, n$**.**
Wähle $v_i = w_i$ **für** $i = 1, \ldots, r$**,** $v_j = \alpha_j w_j$ **für** $j = r+1, \ldots, n$ **mit** $\alpha_j^2 s(v_j, v_j) = 1$
(Quadratwurzel existiert in $\mathbb{C}$**!)**

Nun ist: $\langle v_1, \ldots, v_{k+1}\rangle = \langle v_1, \ldots, v_k\rangle + \langle w\rangle$ **OE** $w = v_{k+1} + \sum_1^k \alpha_i v_i = v_{k+1} + \sum_1^k \beta_i w_i$

Für $i = 1, \ldots, k$**:** $0 = s(w, w_i) = s(v_{k+1}, w_i) + \sum_{j=1}^{k} \beta_j s(w_j, w_i) = s(v_{k+1}, w_i) + \beta_i s(w_i, w_i)$

$$\Rightarrow \quad \beta_i = \frac{-s(v_{k+1}, w_i)}{s(w_i, w_i)}; \quad w_{k+1} = w = v_{k+1} + \sum_1^k \frac{-s(v_{k+1}, v_{k+1})}{s(w_i, w_i)} w_i$$

Basis von $\underbrace{\langle v_1, \ldots, v_{k+1}\rangle}_{\mathfrak{A}}$ **:** $\underbrace{v_1, \ldots, v_k, w_{k+1}}_{\mathfrak{B}} = v_{k+1} + \sum_1^k \alpha_i v_i = v_{k+1} + \sum_1^k \beta_i w_i$

(ii) $\prod_{i=1}^{k+1} \det(s(w_i, w_i)) = D_{k+1} \quad \Rightarrow \quad s(w_k, w_k) = \frac{D_k}{D_{k-1}}$ **(wichtiges Ergebnis)**

5.2.17 Beispiel zu Gram-Schmidt

Sei $A \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ **und** A **gegeben mit** $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 21 \\ 9 & 21 & 61 \end{pmatrix}$**. Zuerst wollen wir die Hauptminoren berechnen. Es gilt:**

$$D_1 = |3| = 3, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 18$$

Die Berechnung des dritten Hauptminor ist nun ein wenig mehr Arbeit:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 21 \\ 9 & 21 & 61 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 12 & 34 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 180$$

Das bedeutet:

$$A \textbf{ ist kongruent zu } \begin{pmatrix} \boxed{D_1} & & 0 \\ & \boxed{\frac{D_2}{D_1}} & \\ 0 & & \boxed{\frac{D_3}{D_2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & & 0 \\ & 6 & \\ 0 & & 10 \end{pmatrix}$$

<u>Frage</u>: Ist die Voraussetzung, daß alle Hauptminoren $\neq 0$ sehr einschränkend?
Zunächst ist eine Hauptminor $= 0$ sicherlich eine Einschränkung, wir können diese Einschränkung aber geschickt umgehen.

Sei A nun gegeben mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Offensichtliches Problem: $D_1 = 0$.

Damit wir einen erste Hauptminor $\neq 0$ erhalten, wenden wir eine symmetrische Gauß-Jordan Umformung an und erhalten A' mit $A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ wobei $D_1 = 3$ und $D_2 = -1$.
Damit wissen wir:

$$A' \text{ ist kongruent zu } \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & \frac{D_2}{D_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Da auch A kongruent zu A' ist und die Kongruenz von Matrizen eine Äquivalenzrelation ist (siehe (IV.3.a)), folgt:

$$A \text{ ist kongruent zu } = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

<u>Tatsache</u>: Erfüllt die symmetrische Matrix A mit $\det(A) \neq 0$ noch nicht die Voraussetzung des Gram-Schmidschen Orthogonalisierungsverfahren, und ist zum Beispiel $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, so liefert eine zufällige symmetrische Gauß-Jordan-Transformation eine zu A kongruente Matrix A', welche die Bedingung erfüllt.
<u>Begründung</u>:

$$A = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|} D_k \\ \hline \end{array} & \\ & \end{pmatrix} \quad \text{wobei der } k\text{-te Hauptminor } D_k = 0$$

Gesucht: $t_{ij} \in \mathbb{R}$ mit $\det(t_{ij}) \neq 0$

$\left(\boxed{t_{ij}}\right)^T \cdot A \cdot \left(\boxed{t_{ij}}\right)$ hat alle Hauptminoren $\neq 0$. Falls dies nicht erfüllt ist, dann formen wir um:

$$A' = \left(\boxed{P_{zs}(t_{11}, \ldots, t_{nn})}\right) \quad \text{mit} \quad D_k = \left|\boxed{P_{zs}(t_{11}, \ldots, t_{nn})}\right| = \overline{P}_k(t_{11}, \ldots, t_{nn})$$

Die $\overline{P}_k(t_{11}, \ldots, t_{nn})$ sind die Minoren. Man erhält, bei ungünstigen Matrizen, Gleichungen: $\overline{P}_1(\ldots, t_{ij}, \ldots) = 0$ oder ... oder $\overline{P}_n(\ldots, t_{ij}, \ldots) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \prod \overline{P}_j(A) = 0$
Hier ein konkretes Beispiel für (2×2)-Matrizen:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} \\ t_{12} & t_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} t_{11} \cdot a + t_{21} \cdot c & t_{11} \cdot b + t_{21} \cdot d \\ t_{12} \cdot a + t_{22} \cdot c & t_{12} \cdot b + t_{22} \cdot d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} t_{11}^2 \cdot a + t_{11}t_{21}(b+c) + t_{21}^2 \cdot d & t_{11}t_{12} \cdot a + t_{21}t_{12} \cdot c + t_{11}t_{12} \cdot b + t_{21}t_{22} \cdot d \\ t_{12}t_{11} \cdot a + t_{22}t_{11} \cdot c + t_{12}t_{21} \cdot b + t_{22}t_{21} \cdot d & t_{12}^2 \cdot a + t_{12}t_{22} \cdot (b+c) + t_{22}^2 \cdot d \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} \overline{P_1}(t_{11}, t_{12}, t_{21}) & \overline{P_2}(t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}) \\ \overline{P_3}(t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}) & \overline{P_4}(t_{12}, t_{21}, t_{22}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Also: $\overline{P_1} = 0$ oder $\overline{P_1} \cdot \overline{P_4} - \overline{P_2} \cdot \overline{P_3} = 0$

Hier eine weiteres Beispiel mit konkreten Zahlen: Sei $A \in \mathbf{Sym}(3, \mathbb{R})$ gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Für die Hauptminoren gilt: $D_1 = 0$, $D_2 = 0$ und $D_3 = -4$. Nun wählen wir eine zufällige Matrix S:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 12 & 13 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 12 \\ 5 & -2 & 13 \end{pmatrix}$$

Nun führen wir eine symmetrische Gauß-Jordan-Transformation durch und erhalten:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^T \cdot A \cdot \mathbf{S} &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 12 \\ 5 & -2 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 12 & 13 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 24 & 0 & 78 \\ 26 & -2 & 88 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 12 & 13 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 30 & 126 & 132 \\ 126 & 1008 & 1121 \\ 132 & 1121 & 1278 \end{pmatrix} \doteqdot A' \end{aligned}$$

Nun gilt für die Hauptminoren von A':

$$D_1 = |30| = 30, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 30 & 126 \\ 126 & 1008 \end{vmatrix} = 12364, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 30 & 126 & 132 \\ 126 & 1008 & 1121 \\ 132 & 1121 & 1278 \end{vmatrix} = 39911532$$

Satz $(\mathbf{V}.2.5)$ sagt aus:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ ist kongruent zu } \begin{pmatrix} \boxed{D_1} & & 0 \\ & \boxed{\frac{D_2}{D_1}} & \\ 0 & & \boxed{\frac{D_3}{D_2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & & 0 \\ & 412\frac{2}{25} & \\ 0 & & 3228\frac{540}{39911532} \end{pmatrix}$$

Bemerkung: In der Literatur oft Gram-Schmidt nur für Räume über $\mathbb{R}$ (hermitische Räume über $\mathbb{C}$) In dieser Allgemeinheit gezeigt von Wörtmann, einem ehemaligen Studenten der Universität Dortmund.

5.2.18 Konsequenz von Satz $(\mathbf{V}.2.5)$, Satz von Cauchy

Sei M eine symmetrische Matrix mit $\mathbf{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ und seien alle Hauptminoren $D_1, D_2, \ldots, D_n \neq 0$, so ist M kongruent zu einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} D_1 & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ & & \frac{D_k}{D_{k+1}} & \\ \mathbf{0} & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Klassifikation von symmetrischen Bilinearformen über $\mathbb{C}$ (bzw. Matrizen über $\mathbb{C}$)

$$\mathbf{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

5.2.19 Satz (V.2.6): Spezielle Räume über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

Jeder symmetrische Bilinearraum über $\mathbb{C}$ hat eine OB $v_1, \ldots, v_n$ mit $s(v_1, v_1) = \ldots = s(v_r, v_r) = 0$, $s(v_{r+1}, v_{r+1}) = \ldots = s(v_n, v_n) = 1$, r ist durch s eindeutig festgelegt.
Matrizentheoretisch: Jede symmetrische Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ ist kongruent zu einer Diagonalmatrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{diag}(\underbrace{0, \ldots, 0}_{r}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-r})$$

r ist eindeutig durch A bestimmt: $r = \mathbf{dim}(\mathbf{Rad}(s)) = \mathbf{dim}(\mathbf{Kern}(A)) = n - \mathbf{rg}(A)$. Zwei symmetrische Matrizen über $\mathbb{C}$ sind genau dann kongruent, wenn sie denselben Rang haben.
Basiswechsel:

$$\mathbf{S} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \alpha_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \alpha_k \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \textbf{dann} \quad \mathbf{M}^{\mathfrak{B}}(s) = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s) \cdot \mathbf{S}$$

Bilden wir nun die Determinante, so folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{det}\left(\mathbf{M}^{\mathfrak{B}}(s)\right) &= \mathbf{det}\left(\mathbf{S}^T\right) \cdot \mathbf{det}\left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)\right) \cdot \mathbf{det}(\mathbf{S}) = \mathbf{det}(\mathbf{S})^2 \cdot \mathbf{det}\left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)\right) \\ &= \mathbf{det}\left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s)\right) = \mathbf{det}\left((s(v_i, v_j))_{i,j \le k+1}\right) \end{aligned}$$

Wir erhalten eine neue Matrix von s bezüglich Basis $\mathfrak{B}$:

$$\mathbf{M}^{\mathfrak{B}}(s) = \left(\begin{array}{c|c} & s(v_i, w_{k+1}) = 0 \\ s(v_i, v_j)_{i,j \le k} & \vdots \\ & s(v_i, w_{k+1}) = 0 \\ \hline 0 \quad \cdots\cdots \quad 0 & s(w_{k+1}, w_{k+1}) \end{array}\right)$$

Da $\mathbf{M}^{\mathfrak{B}}(s)$ Blockgestalt hat folgt:

$$\mathbf{det}\left(\mathbf{M}^{\mathfrak{B}}(s)\right) = \mathbf{det}(s(v_i, v_j))_{i,j \le k} \cdot s(w_{k+1}, w_{k+1}) = \prod_{1}^{k} s(w_i, w_i) \cdot s(w_{k+1}, w_{k+1})$$

Also: gewünschte Bilinearform. r ist eindeutig durch s bestimmt, denn $r = \mathbf{dim}(\mathbf{Rad}(s))$, mit $\mathbf{Rad}(s) = \{x \mid s(x, v) = 0\} = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$.

Symmetrische Bilinearformen (Matrizen) über $\mathbb{R}$

5.2.20 Satz (V.2.7): Sylvesterscher Trägheitssatz

(i) Eine symmetrische Bilinearform besitzt eine Orthogonalbasis $v_1, \ldots, v_n$ der folgenden Form:

$$\begin{array}{rcll} s(v_i, v_i) & = & 0 & \textbf{für} \quad i = 1, \ldots, r \\ s(v_{r+k}, v_{r+k}) & = & +1 & \textbf{für} \quad k = 1, \ldots, r_+ \\ s\left(v_{r+r_++l}, v_{r+r_++l}\right) & = & -1 & \textbf{für} \quad l = 1, \ldots, r_- \end{array}$$

Dabei gilt: $r + r_+ + r_- = n$, und die Werte r, r_+, r_- sind eindeutig bestimmt (träge / invariant) gegenüber der Wahl einer OB mit $s(w_i, w_i) = 0, +1, -1$).

(ii) Jede symmetrische Matrix $\in$ Sym$(n, \mathbb{R})$ ist kongruent zu genau einer Diagonalform der Art:

$$\textbf{diag}(\underbrace{0, \ldots, 0}_{r}, \underbrace{+1, \ldots, +1}_{r_+}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{r_-})$$

<u>**Beweise**</u>:

Zu (i):

<u>**Existenz**</u>: **Wähle OB $v_1', \ldots, v_n'$, OE $s(v_1', v_i') = 0$ für $i = 1, \ldots, r$ und $s(v_i', v_i') = 0$ sonst.**

$\left[s(\alpha_i v_i', \alpha_i v_i') = \alpha_i^2 s(v_i', v_i')\right]$ **Wähle** $\alpha_i = \dfrac{1}{\sqrt{|s(v_i', v_i')|}}$, **setze** $\begin{cases} v_i = \alpha_i v_i' & \textbf{für } i = r+1, \ldots, n \\ v_i = v_i' & \textbf{für } i = 1, \ldots, r \end{cases}$

Dann ist $v_1, \ldots v_n$ eine gewünschte OB.

<u>**Eindeutigkeit**</u>:

Ist $w_1, \ldots, w_n$ eine weitere Basis mit $s(w_i, w_i)$ für $i = 1, \ldots, r' : s(w_1, \ldots, w_{r'}) = 0$, $i = r' + 1, \ldots, r' + r' + r'_+ : s\left(w_{r'+1}, \ldots, w_{r'+r'_+}\right) = +1$, $s(w_i, w_i) = -1$ sonst.

$r = r'$: **Da "Zahl der Nullen in einer OB" = dim(Rad(s)) Betrachte** $U = \underbrace{\left\langle v_1, \ldots, v_{r+r_+}\right\rangle}_{s \geq 0}$,

$U' = \underbrace{\left\langle w_{r'+r'_++1}, \ldots, w_n\right\rangle}_{s \leq 0}$, **da** $s\left(\sum\limits_1^{r+r_+} \alpha_i v_i, \sum\limits_1^{r+r_+} \alpha_i v_i\right) = \sum\limits_1^{r+r_+} \alpha_i^2 s(v_i, v_i) \geq 0$

<u>**Folgerung**</u>: $U \cap U' = \{0\} \quad \Rightarrow \quad \textbf{dim}(U) + \textbf{dim}(U') = (r + r_+) + \left(n - r - r'_+\right) \leq n$

$\Rightarrow \quad r_+ \leq r'_+ \quad$ **und** $\quad r'_+ \leq r_+ \quad \Rightarrow \quad r_+ = r'_+$

Daraus folgt auch: $r_- = r'_-$, da $r + r_+ + r_- = n = r' + r'_+ + r'_-$

Zu (ii): Folgt aus der Eindeutigkeit

5.2.21 Definition (V.2.e): Signatur - sign(A)

Sei s symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}$ und sei A symmetrische Matrix, wobei A kongruent zu

$$\textbf{diag}(\underbrace{0, \ldots, 0}_{r}, \underbrace{+1, \ldots, +1}_{r_+}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{r_-})$$

Dann definieren wir die Signatur: sign$(A) = r_+ - r_-$.

5.2.22 Ursprüngliche Bedeutung des Trägheitssatzes

(siehe Knebusch-Schneider: Einführung in die reelle Algebra)
Thematik: Anzahl reelle Nullstellen $f = 0$**,** $f \in \mathbb{R}[X]$
Sturmsche Ketten (1839): $[a, b]$, $f_1 = f$, $f_2 = f', ..., f_k \in \mathbb{R}[X]$
$f_1(a), f_2(a), \ldots, f_k(a) \rightsquigarrow$ **Anzahl Vorzeichenwechsel** $= V(a)$
$f_1(b), f_2(b), \ldots, f_k(b) \rightsquigarrow$ **Anzahl Vorzeichenwechsel** $= V(b)$
Aus $V(a) - V(b) \quad \Rightarrow \quad$ **Anzahl reeller Nullstellen auf** $[a, b]$**.**
$f_a = X^2 + aX + 1 \rightsquigarrow M(f_a)$ **Sylvestermatrix aus**

$$\frac{X \cdot f_a'}{f_a} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} s_k \cdot x^{-k}}_{\textbf{Potenzreihengestalt}}, \qquad M(f_a) = \left(\boxed{s_{i+j-2}} \right)$$

Nun: Anzahl der reellen Nullstellen von f_a**: sign** $(M(f_a))$

Symmetrische Bilinearformen auf $\mathbb{R}$**. V läßt sich zerlegen:**

$$\mathbf{V} = \mathbf{Rad}(s) \perp \mathbf{V}_+ \perp \mathbf{V}_-$$

wobei $\mathbf{V}_+ = \langle v_1, \ldots, v_{r_+} \rangle$ **Orthogonalbasis,** $s(v_i, v_i) > 0$ **beziehungsweise** $\mathbf{V}_- = \langle w_1, \ldots, w_{r_-} \rangle$ **Orthogonalbasis,** $s(w_i, w_i) < 0$**. Hierbei sind** r_+**,** r_- **eindeutig bestimmt.**
$(\mathbf{V}_+, s)$**:** $s(v, v) \geq 0$**,** $s(v, v) = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0 \quad \Rightarrow \quad s|_{\mathbf{V}_+}$ **ist positiv definit.**
$(\mathbf{V}_-, s)$**:** $s(w, w) \leq 0$**,** $s(w, w) = 0 \quad \Rightarrow \quad w = 0 \quad \Rightarrow \quad s|_{\mathbf{V}_-}$ **ist negativ definit.**
Matrizentheoretische Formulierung:
Sei $A \in \mathbf{Sym}(n, \mathbb{R})$**. Dann**

$$A \text{ \textbf{kongruent zu} } \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{E}_{r_+}} & & 0 \\ & \boxed{\mathbf{E}_{r_-}} & \\ 0 & & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Anmerkungen:

(i) r**,** r_+ **und** r_- **sind eindeutig bestimmt**

(ii) r**,** r_+ **und** r_- **sind ein vollständiges Invariantensystem der Kongruenzklasse.**

5.2.23 Satz (V.2.8): "Zähler reelle Nullstellen"

Zu einem Polynom $f \in \mathbb{R}[X]$ gibt es eine symmetrische Matrix $M(f)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\#\{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 0\} = \mathbf{rg}(M(f))$

(ii) $\#\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} = \mathbf{sign}(M(f))$

$\mathbf{M}(f) =$ **Sylvestermatrix von** f **(mit** $\mathbf{grad}(f) = n$**)** $= \left(\boxed{s_{i+j-2}}\right)_{i,j=1,\ldots n}$, $s_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^k$,

wobei $f = c \cdot \prod\limits_{1}^{n} (X - \alpha_i)$ **in** $\mathbb{C}[X]$

<u>Bedeutung</u> der s_k, die alle reell sind:

$$\frac{Xf'}{f} = \sum_{1}^{n} \frac{X}{X-\alpha_i} = \sum_{1}^{n} \frac{1}{1-\alpha_i X^{-1}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_i^k X^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k\right) X^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} s_k X^{-k}$$

5.2.24 Beispiele:

(**a**): $f = X^3 - 3X^2 + 2, \quad f' = 3X^2 - 6X \quad n = 3,\ 2n - 2 = 4 \quad s_0, s_1, s_2, s_3, s_4$

$\frac{Xf'}{X} = 3X^3 - 6X^2 : X^3 - 3X^2 + 2 = 3 + 3X^{-1} + 9X^{-2} + 21X^{-3} + 61X^{-4} + \ldots$

Also sind $s_0 = 3,\ s_1 = 3,\ s_2 = 9,\ s_3 = 21,\ s_4 = 61$ **und**

$$\mathbf{M}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 21 \\ 9 & 21 & 61 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{rg}(\mathbf{M}(f)) = 3$$

Das heißt (nach (5.2.17)**):** $\mathbf{M}(f)$ **ist kongruent zu** $\begin{pmatrix} 3 & & 0 \\ & 6 & \\ 0 & & 10 \end{pmatrix}$**, mit** $r = 0,\ r_+ = 3,\ r_- = 0$

$\Rightarrow$ **Anzahl verschiedener komplexer NS** $= 3$ **und Anzahl verschiedener reellen NS** $= 3$

NS: $x = 1$

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 2 &= x^3 - x^2 - 2\left(x^2 - 1\right) = x^2(x-1) - 2(x-1)(x+1) \\ &= (x-1)\left(x^2 - 2x - 2\right) \end{aligned}$$

NS $= \left\{1, 1 \pm \sqrt{3}\right\}$

(**b**): $f = X^2 - a,\ a \in \mathbb{R},\ f' = 2x$

$\frac{Xf'}{X} = \frac{2X^2}{X^2 - a} = \frac{1}{1 - aX^{-2}} = \sum\limits_{i} \left(aX^{-2}\right)^i = 2 \cdot \left(1 + aX^{-2} \ldots\right)$**. Also sind** $s_0 = 2,\ s_1 = 0,\ s_2 = 2a$ **und**

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{rg}(M(f)) = \begin{cases} 2 & \textbf{für } a \neq 0 \\ 1 & \textbf{für } a = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{sign}(M(f)) = \begin{cases} 2 & \textbf{für } a > 0 \\ 1 & \textbf{für } a = 0 \\ 0 & \textbf{für } a < 0 \end{cases}, \quad r_+ = r_- = 1$$

Das heißt für $x^2 - a = 0$**:** $\begin{cases} a > 0 & 2 \ \textbf{reelle Lösungen} \\ a = 0 & 1 \ \textbf{reelle Lösung} \\ a < 0 & \textbf{keine reelle Lösung} \end{cases}$

5.3 Kapitel (IV.3): Hermitesche Formen

5.3.1 Motivation

Spezialfall: $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$
Sei $z = u + i \cdot v \in \mathbb{C}$**. Norm** $\|z\| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{\langle (u,v), (u,v) \rangle}$
Wir wollen folgende Abbildungen studieren:

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} : ((z_1, \ldots, z_m), (w_1, \ldots, w_m)) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \overline{z_i} \cdot w_i$$

5.3.2 Definition (V.3.a): hermitesche Form

Sei V ein $\mathbb{C}$**-Vektorraum. Dann heißt** $h : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{C}$ **eine hermitesche Form, wenn gilt:**

(i) $\forall v \in \mathbf{V}$ **ist** $h(v, \cdot) : \mathbf{V} \to \mathbb{C}$ **linear**

(ii) $\forall v, w \in \mathbf{V}$**:** $h(v,w) = \overline{h(w,v)}$

Folgerungen:
a) $h(v + v', w) = h(v,w) + h(v', w)$**, denn**

$$h(v + v', w) = \overline{h(w, v + v')} = \overline{h(w,v) + h(v', w)} = h(v,w) + h(v', w)$$

Also ist eine hermitesche Form additiv im ersten Argument.
b) Behauptung: $h(\alpha \cdot v, w) = \overline{\alpha} \cdot h(v,w)$**. Es gilt:**

$$h(\alpha \cdot v, w) = \overline{h(w, \alpha \cdot v)} = \overline{\alpha \cdot h(w,v)} = \overline{\alpha} \cdot \overline{h(w,v)} = \overline{\alpha} \cdot h(v,w)$$

5.3.3 Definition (V.3.b): Hermitesche Matrix

$A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ **heißt hermitisch, fall** $\overline{A}^T = A$**. Das heißt:**

$$\left(\boxed{\quad \overline{a_{ji}} \quad} \right) = \left(\boxed{\quad a_{ij} \quad} \right) \quad \textbf{für alle } i,j = 1, \ldots, n$$

5.3.4 Beispiele für hermitesche Formen

a) Sei A **gegeben mit** $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ -i & 6i & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$**.** A **ist nicht hermitisch, denn für hermitische Matrizen gilt:** $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$**, also** $a_{ii} \in \mathbb{R}$
b) Sei B **gegeben mit** $B = \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 2 \end{pmatrix}$**.** B **ist hermitische Matrix, da** $\overline{a_{ji}} = a_{ij}$**.**

5.3.5 Definition (V.3.c): $\mathcal{H}_n(\mathbb{C}) = \{$hermitische $n \times n$ Matrizen$\}$

Bemerkung: A reell, A hermitesch $\Rightarrow$ A symmetrisch:

$$\left.\begin{array}{c} A \ \textbf{symmetrisch} \\ \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \cap \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbf{Sym}(n, \mathbb{R})$$

5.3.6 Satz (V.3.1): Beschreibung von hermiteschen Formen durch Matrizen

Bei fester Basis $\mathfrak{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ist die Zuordnung

$$h \mapsto \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(h) := \left(\boxed{h(v_i, v_j)} \right)_{i,j}$$

eine Bijektion zwischen der Menge der hermiteschen Formen und der Menge der hermiteschen Matrizen $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$.
Weiterhin gilt:

Ist $v = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i$ und $w = \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot v_j$, dann folgt:

$$h(v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{x_i} \cdot y_j \cdot h(v_i, v_j) = (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(h) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} h(v, w) &= h\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot v_j \right) \overset{h\,\textbf{linear}}{=} \sum_{i,j=1}^{n} h(x_i \cdot v_i, y_j \cdot v_j) \\ &\overset{(\#)}{=} \sum_{i,j=1}^{n} \overline{x_i} \cdot y_j \cdot h(v_i, w_j) \overset{(*)}{=} (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(h) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zu (#): herausziehen der skalaren Faktoren (siehe (V.3.c)-Folgerung b)
Zu ($*$): selber nachrechnen
Konsequenz: $\mathbf{V} = \mathbb{C}^n$, $\mathfrak{A} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, dann sind durch $(x, y) \mapsto \overline{x}^T \cdot A \cdot y$, $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$, alle hermitischen Formen auf dem $\mathbb{C}^n$ gegeben.

5.3.7 Definition (V.3.d): Radikal einer hermiteschen Form

Sei h Hermitesche Form.
Wir definieren: $\mathbf{Rad}(h) := \{v \in \mathbf{V} | \, h(v, \mathbf{V}) = 0\}$ (wird als Radikal von h bezeichnet.)
Bemerkung: $v \in \mathbf{Rad}(h)$ $\Leftrightarrow$ $h(\mathbf{V}, v) = 0$
Beweis: $h(v, w) = \overline{h(w, v)}$. Es folgt die Behauptung.

5.3.8 Satz (V.3.2)

Bei fester Basis $\mathfrak{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $v = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i$, gilt:

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \in \mathbf{Rad}\,(h) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}\,(h) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Beweis: analog zum Beweis des Satzes für die symmeterische Bilinearform (**V**.1.1).

5.3.9 Korollar (V.3.3)

Sei h Hermitesche Form.
Dann: h nicht ausgeartet, d.h.: $\mathbf{Rad}\,(h) = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{Kern}\,(h\,(v, \mathbf{V})) = \{0\}$, also hat $\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}\,(h)$ Vollrang $\quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}\,(h)$ ist regulär.

5.3.10 Satz (V.3.4): Basiswechsel für hermitesche Formen

Basiswechsel von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$, $\mathbf{S} = \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}}\,(\mathbf{id})$
Dann: $\mathbf{M}^{\mathfrak{B}}\,(h) = \overline{\mathbf{S}}^T \cdot \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}\,(h) \cdot \mathbf{S}$
Beweis: Selber nachrechnen

5.3.11 Definition (V.3.e): Kongruenz vom Hermiteschen Matrizen

$A, B \in \mathcal{H}_n\,(\mathbb{C})$ **heißen kongruent, wenn es eine $\mathbf{S} \in \mathbf{GL}\,(n, \mathbb{C})$ gibt mit**

$$B = \overline{\mathbf{S}}^T \cdot A \cdot \mathbf{S}$$

Bemerkung: Seien $\mathbf{S} \in \mathbf{GL}\,(n, \mathbb{C})$, $A \in \mathcal{H}_n\,(\mathbb{C})$. Ist nun $\mathbf{S}^T \cdot A \cdot \mathbf{S} \in \mathcal{H}_n\,(\mathbb{C})$?
Dann müßte gelten: $\overline{\mathbf{S}^T \cdot A \cdot \mathbf{S}}^T = \mathbf{S}^T \cdot A \cdot \mathbf{S}$.
Es gilt:

$$\overline{\mathbf{S}^T \cdot A \cdot \mathbf{S}} = \overline{\mathbf{S}^T} \cdot \overline{A} \cdot \overline{\mathbf{S}} = \overline{\mathbf{S}}^T \cdot \overline{A} \cdot \overline{\mathbf{S}}$$

da $\overline{A \cdot B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ und $\overline{\mathbf{S}^T} = \overline{\mathbf{S}}^T$.
Auf der anderen Seite:

$$\left(\overline{\mathbf{S}^T \cdot A \cdot \mathbf{S}}\right)^T = \left(\overline{\mathbf{S}^T} \cdot \overline{A} \cdot \overline{\mathbf{S}}\right)^T = \overline{\mathbf{S}}^T \cdot \overline{A}^T \cdot \overline{\mathbf{S}^T}^T = \overline{\mathbf{S}}^T \cdot A \cdot \overline{\mathbf{S}}$$

da $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ und $\overline{A}^T = A$ nach Definition.
Im allgemeinen falsch: $\overline{\mathbf{S}}^T \cdot A \cdot \overline{\mathbf{S}} \neq \overline{\mathbf{S}}^T \cdot A \cdot \mathbf{S}$ für $\mathbf{S} \in \mathbf{GL}\,(n, \mathbb{C})$
Wohldefiniertheit: Dagegen

$$\left(\overline{\overline{\mathbf{S}}^T \cdot A \cdot \mathbf{S}}\right)^T = \left(\mathbf{S}^T \cdot \overline{A} \cdot \overline{\mathbf{S}}\right)^T = \overline{\mathbf{S}}^T \cdot \overline{A}^T \cdot \mathbf{S} = \overline{\mathbf{S}}^T \cdot A \cdot \mathbf{S}$$

Also: $\left(\overline{\overline{\mathbf{S}}^T \cdot A \cdot \mathbf{S}}\right)^T \in \mathcal{H}\,(\mathbb{C})$

5.3.12 Definition (V.3.f): Orthogonalbasis einer hermiteschen Form

Sei h eine hermitesche Form auf V, $\mathfrak{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ heißt Orthogonalbasis von h wenn gilt:

$$h(v_i, v_j) = 0 \quad \textbf{für } i \neq j$$

Matrizentheoretische Formulierung:

$$\mathfrak{A} \textbf{ ist Orthogonalbasis} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(h) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_r \end{pmatrix} \quad \textbf{mit} \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

Beweis:
"$\Rightarrow$" generell gilt: $h(v,v) \in \mathbb{R}$**, denn** $h(v,v) = \overline{h(v,v)}$
"$\Leftarrow$" klar nach Definition

5.3.13 Satz (V.3.5) Sylvestescher Trägheitssatz für hermitesche Formen

(i) Sei $(\mathbf{V}, h)$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit hermitescher Form. Dann gibt es eine orthogonale Zerlegung für V:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Rad}(h) + \mathbf{V}_+ + \mathbf{V}_-$$

mit $v \in \mathbf{V}_+ \quad \Rightarrow \quad h(v,v) \geq 0$**. Falls** $h(v,v) = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0$
beziehungsweise $w \in \mathbf{V}_- \quad \Rightarrow \quad h(w,w) \leq 0$**. Falls** $h(w,w) = 0 \quad \Rightarrow \quad w = 0$
(ii) Sei $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$. Dann gibt es $\mathbf{S} \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ mit

$$\overline{\mathbf{S}}^T \cdot A \cdot \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{E}_{r_+}} & & 0 \\ & \boxed{\mathbf{E}_{r_-}} & \\ 0 & & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Dabei sind r_+, r_- eindeutig bestimmt.
<u>Beweis zu (ii)</u>:

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ **wobei** $a_{ii} \in \mathbb{R}$ **und** $\overline{a_{ji}} = a_{ij}$

Zur Vereinfachung der Rechnung sei nun $n = 2$.

Damit ist $A = \begin{pmatrix} \alpha & b \\ \overline{b} & \beta \end{pmatrix}$**, mit** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ **und** $b \in \mathbb{C}$

Fall 1: $\alpha \neq 0$. Wir formen mit einem symmetrischen Gauß-Jordan Verfahren um.

Sei $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$**. Dann:**

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{S}}^T \cdot A \cdot \mathbf{S} &= \overline{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^T \cdot \begin{pmatrix} \alpha & b \\ \overline{b} & \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\overline{b}}{\alpha} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \overline{b} & -\overline{b} \cdot \frac{b}{\alpha} + \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta - \frac{\overline{b} \cdot b}{\alpha} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wie erhalten wir nun ± 1 für die Einträge?

$\alpha \neq 0$ **nach Voraussetzung. Sei nun** $\beta' = \beta - \frac{\overline{b} \cdot b}{\alpha}$ (β' **ist Reell). Es gilt:**

$$\begin{aligned} \overline{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^T \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \overline{x} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha \cdot x \cdot \overline{x} & 0 \\ 0 & \beta' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Falls $\alpha > 0$**: Setze** $x := \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$**. Falls** $\alpha < 0$**: Setze** $x := \frac{1}{\sqrt{-\alpha}}$**.**

Damit erhalten wir: $A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{|\alpha|} & 0 \\ 0 & \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \beta' \end{pmatrix}$**.**

Wir verfahren analog für β' **und erhalten** $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$**, wobei** $* = -1, 0, +1$**.**

2. Fall: Sei nun $\alpha = 0$**. Wir unterscheiden nun zwei weitere Fälle:**

Sei $\beta \neq 0$**. Dann tauschen wir die** 0 **und** β **durch eine symmetrische Gauß-Jordan-Transformation:**

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ \overline{b} & \beta \end{pmatrix} \rightsquigarrow \overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ \overline{b} & \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & b \\ \overline{b} & 0 \end{pmatrix}$$

Nun können wir den ersten Fall anwenden.

Sei nun $\beta = 0$**. Dann erhalten wir:**

$$\overline{\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ \overline{b} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ \overline{b} & \overline{\gamma} \cdot b + \gamma \cdot \overline{b} \end{pmatrix}$$

Falls $b + \overline{b} \neq 0$**, dann setze** $\overline{b} := r \cdot i$ **und wende den vorherigen Fall an.**

Falls $b + \overline{b} = 0$**, dann wähle ein** $\gamma \in \mathbb{C}$**, so daß** $\overline{\gamma} \cdot b + \gamma \cdot \overline{b} \neq 0$ **und wende obigen Fall an.**

5.3.14 Schema der Diagonalisierung (von Matrizen)

Grundoperationen: symmetrische Bilinearformen: $\overline{\mathbf{S}}^T \cdot A \cdot \mathbf{S}$

Symmetrischer Gauß-Jordan-Prozeß: Sei $a \in \mathbb{C}$**:**

S	$\overline{\mathbf{S}}^T \cdot A$	$A \cdot \mathbf{S}$
Multiplikation mit Skalar a	i-te Zeile mit $\overline{a}$ multipliziert	i-te Spalte mit a multipliziert
Vertauschung	i-te und j-te Zeile vertauscht	i-te und j-te Spalte vertauscht
Addition eines Vielfachen a	Addition des $\overline{a}$-fachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile	Addition des a-fachen der j-ten Spalte zur i-ten Spalte

Abbildung V-3: Grundoperationen

Schließlich erhalten wir: $\overline{\mathbf{S}}^T \cdot A \cdot \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$**.** A **liefert hermitesche Form** h_A**:** $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$**,** $(x, y) \mapsto \overline{x}^T \cdot A \cdot y$

h_A-Orthogonalbasis sind die Spaltenvektoren von S:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \cdots & v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A \cdot \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ A \cdot v_1 & \cdots & A \cdot v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

Daher die Matrizenmultiplikation in neuer Perspektive:

$$\begin{pmatrix} \leftarrow & a_1 & \rightarrow \\ & \vdots & \\ \leftarrow & a_n & \rightarrow \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ b_1 & \cdots & b_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} = \left(\boxed{\langle a_i, b_i \rangle} \right)_{i,j}$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt ist. Damit folgt:

$$\overline{\mathbf{S}}^T \cdot A \cdot \mathbf{S} = \left(\boxed{\overline{v_i}^T \cdot A \cdot v_j} \right)_{i,j}$$

Wir folgern: $\overline{v_i}^T \cdot A \cdot v_j = \delta_{ij} \cdot \alpha_i$

5.3.15 Rekursive Konstruktion von S

S ist Produkt von Umformungsmatrizen: $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{S}_{r-1} \cdot \mathbf{S}_r$

Dann: $\mathbf{S} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{S}_{r-1} \cdot \mathbf{S}_r$

(dieselbe Ketten von Umformungsmatrizen auf E angewandt). Nun wenden wir folgendes Schema an:

$$\begin{array}{lcl} A & \rightarrow & \overline{\mathbf{S}_r}^T \cdot \ldots \cdot \overline{\mathbf{S}_1}^T \cdot A \cdot \mathbf{S}_1 \cdot \ldots \cdot \mathbf{S}_r = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \\ \mathbf{E} & \rightarrow & \mathbf{E} \cdot \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{S}_r = \mathbf{S} \end{array}$$

Wie findet man die $\mathbf{S}_i$ (= Umformungen)?

Gegeben $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$: Zuerst betrachten wir a_{11}:

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & * & \cdots & * \\ \hline * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{array} \right)$$

Anmerkung: $a_{11} \in \mathbb{R}$, da eine hermitsche Matrix nur reelle Werte auf der Diagonalen hat.

Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Fall $a_{11} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ durch Spaltenumformungen und simultane Zeilenumformungen erhalten wir A' mit

$$A' = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

Die Matrix B ist in diesem Fall wieder hermitsche Matrix: $\overline{B}^T = B$.

Sei $\overline{\mathbf{S}_0}^T \cdot B \cdot \mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_{n-1} \end{pmatrix}$. **Dann**

$$\overline{\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{S}_0 & \\ 0 & & & \end{array}\right)}^T \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{S}_0 & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

2. Fall: $a_{11} = 0$

Nun unterscheiden wir zwei weitere Fälle:

a) $\exists a_{1j} \neq 0 \quad \Rightarrow$ **passende Spalten- beziehungsweise Zeilenadditionen liefern**

$$\left(\begin{array}{c|ccc} a'_{11} & * & \cdots & * \\ \hline * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{array}\right) \quad \textbf{mit} \quad a'_{11} \neq 0$$

b) Alle $a_{1j} = 0 \quad \Rightarrow$ **alle Einträge in der ersten Spalte sind Null, da** $a_{i1} = \overline{a_{1i}}$. **Wir erhalten damit:**

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

5.3.16 Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

Sei $h : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{C}$ **hermitsche Form mit** $\mathrm{M}^{\mathfrak{A}}(h) = \left(\boxed{h(v_i, v_j)} \right)$

Voraussetzung: Alle Hauptminoren $D_k = \begin{vmatrix} h(v_1, v_1) & \cdots & h(v_1, v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ h(v_k, v_1) & \cdots & h(v_k, v_k) \end{vmatrix} \neq 0$

Aus $v_1, \dots, v_n$ **erhält man die Orthogonalbasis:** $w_1 = v_1$, $w_{k+1} = v_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \cdot w_j$

(Das heißt: $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle w_1, \dots, w_k \rangle$ **und** $w_{k+1} \perp \langle v_1, \dots, v_k \rangle$)

Nun stellt sich die Frage, wie man die α_i **berechnet? Es gilt:**

$$0 = h(w_i, w_{k+1}) = h(w_i, v_{k+1}) + \alpha_i \cdot h(w_i, w_i) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_i = \frac{h(w_i, v_{k+1})}{h(w_i, w_i)}$$

Zusätzliche Eigenschaften: $D_k = \prod_{i=1}^{k} h(w_i, w_i)$, **damit:** $h(w_{k+1}, w_{k+1}) = \dfrac{D_{k+1}}{D_k}$

Anders ausgedrückt:

$$\mathrm{M}^{\mathfrak{A}}(h) \ \ \textbf{ist kongruent zu} \ \ \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{D_k}{D_{k-1}} \end{pmatrix}$$

Obige Aussage wird auch als Satz von Cauchy bezeichnet.

5.4 Kapitel (V.4): Euklidsche bzw. unitäre Vektorräume

5.4.1 Vorbemerkung

Hier: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, betrachte $\mathbb{K}$-Vektorräume zusammen mit

(a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: **symmetrische Bilinearform**

(b) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: **hermitesche Form**

In beiden Fällen bezeichnen wir die Form mit h
Anmerkung: eine hermitesche Form eingeschränkt auf die reellen Zahlen degeneriert zu einer symmetrischen Bilinearform.

5.4.2 Definition (V.4.a): Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$: $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{K}$ **ist eine positiv definite**

(a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: **symmetrische Bilinearform**

(b) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: **hermitesche Form**

Das bedeutet, daß zusätzlich gilt: $\forall v$: $h(v,v) \geq 0$, $\forall v \neq 0$: $h(v,v) \gneqq 0$

5.4.3 Beispiele für das Skalarprodukt

(a) Standardskalarprodukt: $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$. **Es gilt:**

$$((z_1, \ldots, z_n), (w_1, \ldots, w_n)) \mapsto \langle (z_1, \ldots, z_n), (w_1, \ldots, w_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{z_i} \cdot w_i$$

Positive Definitheit:

$$\langle (z_1, \ldots, z_n), (z_1, \ldots, z_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{z_i} \cdot z_i = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \geq 0$$

Falls $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad |z_i| = 0\, \forall i \quad \Rightarrow \quad z_i = 0\, \forall i \quad \Rightarrow \quad z = 0$

(b) Einschränkung von (a) **auf** $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $\displaystyle\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_1 \cdot y_i$

(c) $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ **mit** $X = [a,b]$
Skalarprodukt mit Gewicht: $\displaystyle (f,g) \mapsto \int_a^b f(t) \cdot g(t) \cdot w(t)\, \mathrm{d}t$
$w(t)$ **ist eine stetige Gewichtsfunktion, wobei** $g(t) > 0$ **auf** X
Dieses Beispiel ist positiv definit, da

$$\int_a^b (f(t))^2 \cdot w(t)\, \mathrm{d}t \geq 0 \qquad \int_a^b (f(t))^2 \cdot w(t)\, \mathrm{d}t = 0 \quad \Rightarrow \quad f \equiv 0 \quad \textbf{auf } [a,b]$$

Schon gezeigt bei der Definition von Definitheit.
(d) Einschränkung von (c) **endlich dimensionale Teilräume**
Der Raum der Polynome ist endlich dimensional:

$$\mathbf{P}_k([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f \ \textbf{Polynom vom Grad} \leq k\}$$

Es gilt: $\dim(\mathbf{P}_k) = k+1$. **Auf** $\mathbf{P}_k$ **ist** $\displaystyle (f,g) \mapsto \int_a^b f \cdot g \cdot w\, \mathrm{d}t$ **ein Skalarprodukt.**

5.4.4 Definition (V.4.b): euklidische und unitärer Vektorraum

Ab jetzt als Konvention: V ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf V.
Für $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ sprechen wir von einem euklidischen Vektorraum.
Für $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ sprechen wir von einem unitären Vektorraum.

5.4.5 Satz (V.4.1)

Jeder Untervektorraum eines euklidischen beziehungsweise unitären Vektorraum ist nicht ausgeartet.
Das heißt: Das Gram-Schmidt Verfahren ist universell anwendbar und liefert (nach Normierung) eine Orthonormalbasis (ONB).

5.4.6 Definition (V.4.c): Orthonormalraum

Es gilt: $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ **für** $i \neq j$ **und** $\langle v_i, v_i\rangle = 1$

5.4.7 Beweis zu Satz (V.4.1)

Sei $\mathbf{U} < \mathbf{V}$ **und** $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathbf{U}} =: h'$ **(Einschränkung der Form auf den Unterraum)**
Für das Radikal gilt: $\mathbf{Rad}\,(h') = \{u \in \mathbf{U} |\, \forall u' \in \mathbf{U}\text{:}\ \ h'(u,u') = 0\}$.
Insbesondere wähle $u' = u$**. Das heißt:** $h'(u,u) = \langle u,u\rangle = 0$**. Nach Definition des Skalarproduktes folgt:** $u = 0$
Also gilt für das Radikal: $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathbf{U}} = 0$ **für alle Unterräume.**
Zu Gram-Schmidt: $v_1,\dots,v_n$, $\mathbf{U}_k := \langle v_1,\dots,v_k\rangle$, $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathbf{U}_k}$**. Die beschreibende Matrix ist:**

$$\left(\boxed{\langle v_i, v_j\rangle}\right)_{i,j\leq k}$$

Wir wissen: $\mathbf{Rad}\,(h) = \mathbf{Kern}\left(\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(h)\right)$

Damit: $\mathbf{Rad}\left(\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathbf{U}_k}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{det}\left(\boxed{\langle v_i, v_j\rangle}\right)_{i,j\leq k} \neq 0$

Aus $v_1,\dots,v_n$ **gewinnt man Orthogonalbasis** $w_1,\dots,w_n$**, alle** $h(w_i,w_i) \gneqq 0$
Nun wollen wir α_i **bestimmen, so daß** $h(\alpha\cdot w_i, \alpha\cdot w_i) = 1$.
Nach Definition: $h(\alpha\cdot w_i,\alpha\cdot w_i) = \overline{\alpha}\cdot\alpha\cdot h(w_i,w_i)$**. Wählen wir nun** $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{h(w_i,w_i)}}$**, so erhalten wir die gewünschte Orthonormalbasis** $\left(\dfrac{1}{\sqrt{h(w_1,w_1)}}w_1,\dots,\dfrac{1}{\sqrt{h(w_k,w_k)}}w_k\right)$.

5.4.8 Beispiele für die Berechnung einer Orthonormalbasis

Sei $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt.
Nun seien v_1, v_2 gegeben mit $v_1 = (1,1)$ und $v_2 = (2,3)$. Nach Gram-Schmidt folgt:

$$w_1 = (1,1)\,, \qquad w_2 = v_2 + \alpha_1 \cdot w_1$$

Wenn wir nun w_2 berechnen, so nutzen wir aus, daß $w_1 \perp w_2$. Das heißt:

$$0 = \langle w_1, w_2\rangle = \langle w_1, v_2 + \alpha_1 \cdot w_1\rangle = \langle v_1, v_2\rangle + \alpha_1 \cdot \langle v_1, v_1\rangle$$

Einsetzen liefert: $0 = 5 + \alpha_1 \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = -\frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad w_2 = (2,3) - \frac{5}{2}\cdot(1,1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Wir erhalten damit folgendeOrthogonalbasis: $(1,1)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Um eine Orthonormalbasis zu erhalten müssen wir nun die Orthogonalbasis normieren. Wir erhalten:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(1,1)\,, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(-1,1)$$

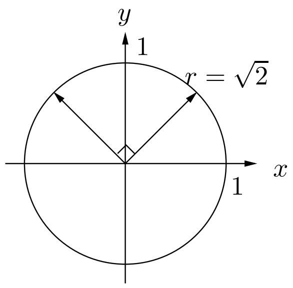

Abbildung V-4: Geometrische Interpretation der Orthonormalbasisvektoren

Alle Orthonormalbasen des $\mathbb{R}^2$:

$$\|v\| = \langle v, v\rangle = \textbf{Länge von } v = \textbf{Abstand vom Nullpunkt}$$

Allgemein gilt für den Winkel zwischen zwei Vektoren (vergleiche (1.3.5)**)**

$$\cos(\measuredangle) = \frac{\langle v, u\rangle}{\|v\|\cdot\|u\|}$$

Die Othonormalbasen des $\mathbb{R}^2$ sind zwei Vektoren der Länge Eins, die senkrecht aufeinander stehen.

5.4.9 Metrik und Skalarprodukt

Das Skalarprodukt liefert "Abstände", das heißt Metrik (vergleiche Analysis)
V sei euklidischer beziehungsweise unitärer Vektorraum und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sei Skalarprodukt.

5.4.10 Definition (V.4.d): Norm, Metrik

Wir definieren die Norm auf einem Vektorraum V über das Skalarprodukt:

$$\|v\| := \langle v, v\rangle$$

Seien $v, w \in \mathbf{V}$. Wir definieren eine Metrik auf V über die Norm:

$$\mathbf{d}(v,w) := \|v - w\| := \langle v - w, v - w\rangle$$

5.4.11 Satz (V.4.2): Eigenschaften der Norm

Sei V euklidischer beziehungsweise unitärer Vektorraum.
Es gelten die folgenden Eigenschaften:

(i) $\|v\| \geq 0 \ \forall v \in \mathbf{V}$

(ii) $\|v\| = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0$

(iii) $\|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|v\| \ \forall v \in \mathbf{V} \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$

(iv) Dreiecksungleichung: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

5.4.12 Satz (V.4.3): Ungleichung von Cauchy-Schwarz

Ist V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum, so gilt für alle $u, v \in \mathbf{V}$:

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn u und v linear abhängig sind.
<u>Beweis</u> **Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:**
1. Fall: $\langle u, v\rangle = 0 \quad \Rightarrow$ **Behauptung**
2. Fall: $\langle u, v\rangle \neq 0$. **Für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:**

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle u + \lambda v, u + \lambda v\rangle &= \|u\|^2 + \overline{\lambda} \cdot \langle v, u\rangle + \lambda \cdot \langle u, v\rangle + |\lambda|^2 \cdot \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 + 2\Re(\lambda) \cdot \langle u, v\rangle + |\lambda|^2 \cdot \|v\|^2 \end{aligned}$$

Da $\langle u, v\rangle \neq 0$ ist insbesondere $v \neq 0$. Nun setze $\lambda := -\dfrac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2 \cdot \langle u, v\rangle}$. Setzen wir λ in die obige Formel ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|u\|^2 + 2\Re(\lambda) \cdot \langle u, v\rangle + |\lambda|^2 \cdot \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 - 2 \cdot \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2} + \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2} = \|u\|^2 - \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$0 \leq \|u\|^2 - \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2} \quad \Leftrightarrow \quad |\langle u, v\rangle|^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$$

Aufgrund der Monotonie der Wurzel folgt: $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$
<u>**Gleichheit**</u>**:**
"$\Leftarrow$": Seien u und v linear abhängig. OE $u = \mu \cdot v$. Dann folgt:

$$|\langle \mu \cdot v, v\rangle| = |\mu| \cdot \langle v, v\rangle = |\mu| \cdot \|v\|^2$$

"$\Rightarrow$" Gleichheit $\quad \Leftrightarrow \quad u = -\lambda \cdot v = \dfrac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2 \cdot \langle u, v\rangle} \cdot v$. **Damit sind u und v linear abhängig.**

5.4.13 Beweis zu Satz (V.4.2): Eigenschaften der Norm

Zu (1) und (2): Da $\langle\cdot,\cdot\rangle$ positiv definiet ist $\langle u,v\rangle \geq 0$ und $\langle u,v\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u=0$
$\Rightarrow \quad \sqrt{\langle u,v\rangle} = 0$ **mit Gleichheit** $\quad \Leftrightarrow \quad u = 0$
Zu (3): Nach Definition folgt:

$$\|\alpha \cdot u\| = \sqrt{\langle \alpha\cdot u, \alpha\cdot u\rangle} = \sqrt{\alpha\cdot\overline{\alpha}\cdot\langle u,u\rangle} = \sqrt{\alpha^2\cdot\langle u,u\rangle} = |\alpha|\cdot\sqrt{\langle u,u\rangle} = |\alpha|\cdot\|u\|$$

Zu (4): Nach Definition folgt:

$$\|u+v\|^2 \quad = \quad \langle u+v, u+v\rangle = \underbrace{\langle u,u\rangle + 2\Re\left(\langle u,v\rangle\right) + \langle v,v\rangle}_{(*)}$$

Nun schätzen wir zuerst den Realteil ab und anschließend mit der Ungleichung von Cuachy-Schwarz:

$$(*) \leq \langle u,u\rangle + 2\cdot|\langle u,v\rangle| + \langle v,v\rangle \quad \overset{\textbf{CSU}}{\leq} \quad \|u\|^2 + 2\cdot\|u\|\cdot\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\|+\|v\|)^2$$

Aufgrund der Monotonie der Wurzel folgt: $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

5.4.14 Folgerung aus Satz (V.4.2): Definition der Metrik

$\mathbf{d}(u,v) := \|u-v\|$ **definiert eine Metrik auf V**
Beweis: Man rechne die Eigenschaften einer Metrik nach:
reiroman

- **(i)** $\mathbf{d}(u,v) \geq 0$ **und** $\mathbf{d}(u,v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = v$
- **(ii)** $\mathbf{d}(u,v) = \mathbf{d}(v,u)$ **(Symmetrie)**
- **(iii)** $\mathbf{d}(u,v) \leq \mathbf{d}(u,w) + \mathbf{d}(w,v)\ \forall w \in \mathbf{V}$

Hauptachsentransformation

Es folgen drei Fassungen des Satzes über Hauptachsentransformation

5.4.15 Satz (V.4.4.a): 1.Version Hauptachsentransformation

Sei $(\mathbf{V}\langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklidischer beziehungsweise unitärer Vektorraum, h eine symmetrische beziehungsweise hermitesche Form auf V.
Dann existiert eine Orthonormalbasis von V, die Orthogonalbasis für h ist.

5.4.16 Definition (V.4.d): Orthogonale Gruppe

Wir definieren: $\mathcal{O}(n) := \left\{ A \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{R}) \middle| A^T\cdot A = A\cdot A^T = \mathbf{E}_n\right\}$ ist die orthogonale Gruppe. Ihre Elemente heißen orthogonale Matrizen, sie ist Gruppe unter der Matrizenmultiplikation.

5.4.17 Definition (V.4.e): Unitäre Gruppe

Wir definieren: $\mathcal{U}(n) := \left\{ A \in \mathbf{GL}(n,\mathbb{C}) \middle| \overline{A}^T\cdot A = A\cdot\overline{A}^T = \mathbf{E}_n\right\}$ ist die unitäre Gruppe. Ihre Elemente heißen unitäre Matrizen,sie ist Gruppe unter der Matrizenmultiplikation.

5.4.18 Interpretation

(i) $S \in \mathcal{O}(n)$ **beziehungsweise** $\mathcal{U}(n) \quad \Leftrightarrow$ **Spaltenvektoren bilden Orthonormalbasis für das Skalarprodukt**

(ii) Diagonalisierbarkeit von symmetrischen beziehungsweise hermiteschen Matrizen (wegen $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$ beziehungsweise $\mathbf{S}^{-1} = \overline{\mathbf{S}}^T$) bezüglich "ausgezeichneter" Transformationsmatrizen und mit rellen Eigenwerten.

5.4.19 Bemerkungen

a) Die Spalten einer orthogonalen beziehungsweise unitäre Matrix bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ beziehungsweise $\mathbb{C}^n$ bezüglich des Standardskalarproduktes (folgt aus Definition).
Die Umkehrung gilt ebenfalls:
Eine Matrix $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$) ist genau dann orthogonal, wenn die Spalten von A eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ bzw $\mathbb{C}^n$ bezüglich des Standardskalarproduktes bilden.
b) Aus der Definition folgt ebenfalls: $\overline{A}^T = A^{-1}$

5.4.20 Satz (V.4.4.b): 2.Version Hauptachsentransformation

Sei $A \in \mathbf{Sym}(n, \mathbb{R})$ beziehungsweise $A \in \mathcal{H}(n, \mathbb{C})$. Dann gibt es ein $\mathbf{S} \in \mathcal{O}(n)$ beziehungsweise $\mathbf{S} \in \mathcal{U}(n)$ mit

$$\mathbf{S}^T \cdot A \cdot \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \textbf{bzw.} \quad \overline{\mathbf{S}}^T \cdot A \cdot \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

wobei die λ_i die Eigenwerte von A sind. Die Eigenwerte von A sind reell und es gilt:

(i) $\mathbf{rg}(A) = \{\text{Anzahl } i | \lambda_i \neq 0\}$

(ii) $\mathbf{sign}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{sgn}(\lambda_i)$

(iii) i-te Spalte von S ist Eigenvektor zum Eigenwert λ_i

5.4.21 Satz (V.4.5)

Sei $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich dimensionaler euklidischer beziehungsweise unitärer Vektorraum und sei $f \in \mathbf{End}(\mathbf{V})$. Zu f existiert genau ein Endomorphismus $f^{\mathbf{ad}}$ auf V mit $\left\langle f^{\mathbf{ad}}(u), v \right\rangle = \langle u, f(v) \rangle \ \forall u, v \in \mathbf{V}$. Dieser Endomorhpismus heißt der zu f adjungierte Endomorphismus.

5.4.22 Definition (V.4.f): Selbstadjungierter Endomorphismus

$f \in \mathbf{End}(\mathbf{V})$ heißt selbstadjungierend, wenn $f^{\mathbf{ad}} = f$.

5.4.23 Bemerkung

(a) Sei $\mathfrak{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis. Es gilt:

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}\left(f^{\mathbf{ad}}\right) = \overline{\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)}^T$$

Denn:

$$\begin{aligned}
\left\langle \sum_{i=1}^n x_i \cdot v_i, f\left(\sum_{i=1}^n y_i \cdot v_i\right)\right\rangle &= \overline{x}^T \cdot \left(\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f) \cdot y\right) = \left(\overline{x}^T \cdot \mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)\right) \cdot y \\
&= \left(\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)^T \cdot \overline{x}\right)^T \cdot y = \overline{\left(\left(\overline{\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)}\right)^T \cdot x\right)}^T \cdot y \\
&\overset{(*)}{=} \left\langle f^{\mathbf{ad}}\left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot v_i\right), \sum_{i=1}^n y_i \cdot v_i\right\rangle = \overline{\left(\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}\left(f^{\mathbf{ad}}\right) \cdot x\right)}^T \cdot y
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. Anmerkung zu $(*)$: Standardskalarprodukt $\langle x, y\rangle = x^T \cdot y$.
(b) f selbstadjungierter $\Leftrightarrow$ $\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)$ ist symmterisch beziehungsweise hermitesch, denn

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}\left(f^{\mathbf{ad}}\right) = \overline{\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}}^T$$

5.4.24 Satz (V.4.4.c): 3.Version Hauptachsentransformation

Sei $(\mathbf{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ endlich dimensionaler euklidischer beziehungsweise unitärer Vektorraum. Zu jedem selbstadjungierenden Endomorphismus f auf $\mathbf{V}$ existiert eine Orthonormalbasis bestehehend aus den Eigenvektoren von f. Die Eigenwerte sind reell.

Äquivalenz der Hauptachsentransformationssätze:

5.4.25 (V.4.4.a) $\Rightarrow$ (V.4.4.b)

Angenommen Satz (V.4.4.a) gilt:

Sei $A \in \mathbf{Sym}_n(\mathbb{R})$ beziehungsweise $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$. Zu A gehört eine symmetrische beziehungsweise hermitesche Form s_A auf $\mathbb{R}^n$ beziehungsweise $\mathbb{C}^n$.

Nach Satz (V.4.4.a) existiert eine Orthonormalbasis $\mathbb{A}$ bezüglich des Standardskalarprodukt, die gleichzeitig Orthogonalbasis für s_A ist.

$$\Rightarrow \quad \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s_A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Es ist:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(s_A) &= \left(\overline{\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}}(\mathbf{id})\right)^T \cdot A \cdot \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(\mathbf{id}) \\
&= \left(\overline{\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}}(\mathbf{id})\right)^T \cdot \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(s_A) \cdot \mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(\mathbf{id})
\end{aligned}$$

wobei $\mathfrak{B}$ die Standardbasis sei. Da $\mathfrak{A}$ Orthogonalbasis ist, ist $\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(\mathbf{id})$ orthogonal beziehungsweise unitär. Deshalb ist $\left(\overline{\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(\mathbf{id})}\right)^T = \left(\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(\mathbf{id})\right)^{-1}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sind also Eigenwerte von A. Nach Aufgabe (44.b) sind diese Eigenwerte reell. Die restlichen Eigenschaften (i) bis (iii) folgen.

5.4.26 Beweis zu Satz (V.4.5): adjungierten Abbildungen

f: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$, V euklidicher beziehungsweise unitärer Vektorraum.
$f^{\mathbf{ad}}$: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definiert durch

$$\left\langle f^{\mathbf{ad}}(u), v\right\rangle = \langle u, f(v)\rangle \quad \textbf{fr alle } u, v \in \mathbf{V}$$

Existenz (in Stichworten): Sei $\mathfrak{A}$ Orthogonalbasis von V:

$$\overline{\left(\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)\right)}^T =: \mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}\left(f^{\mathbf{ad}}\right)$$

Eindeutigkeit:
Angenommen man hätte $\left\langle \overline{f}(u), v\right\rangle = \langle u, f(v)\rangle$ für alle $u, v \in \mathbf{V}$. Dann folgt:

$$\left\langle \overline{f}(u) - f^{\mathbf{ad}}(u), v\right\rangle = \left\langle \overline{f}(u), v\right\rangle - \left\langle f^{\mathbf{ad}}(u), v\right\rangle \overset{\textbf{Def.}}{=} \langle u, f(u)\rangle - \langle u, f(u)\rangle = 0$$

Das gilt für alle $v \in \mathbf{V}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ nicht ausgeartet $\Rightarrow \overline{f}(u) - f^{\mathbf{ad}}(u) = 0 \Leftrightarrow \overline{f}(u) = f^{\mathbf{ad}}(u)$
Laut Übungsaufgabe 44 / LinAII, Standardskalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, A:

$$\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \quad \Rightarrow \quad A^{\mathbf{ad}} = \overline{A}^T$$

5.4.27 Beweis (V.4.4.b) $\Rightarrow$ (V.4.4.c)

Wähle $\mathfrak{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis. Setze $A := \mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f)$. Da f selbstadjungiert, ist A symmetrisch beziehungsweise hermitesch. Nach (V.4.4.b) existiert $\mathbf{S} \in \mathcal{O}(n)$ beziehungsweise $\mathbf{S} \in \mathcal{U}(n)$ mit

$$\overline{\mathbf{S}}^T \cdot A \cdot \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Dann liefert die Spalten von S eine Basis $\mathfrak{B}$ von V:

$$w_j = \sum_i s_{ij} \cdot v_i \quad \textbf{für } j = 1, \ldots, n$$

Nachrechnen liefert, daß $\mathfrak{B}$ Orthonormalbasis ist.
Kalkül des Basiswechsels:

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f) = \mathbf{S}^{-1} \cdot A \cdot \mathbf{S} = \overline{\mathbf{S}}^T \cdot A \cdot \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Also: $\mathfrak{B}$ ist Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.

5.4.28 Lemma ($\mathbf{V}$.4.6)

Diese Lemma werden wir im nächsten Beweis brauchen.
In der Situation von ($\mathbf{V}$.4.4.a) **gilt: Es existiert** f: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $f = f^{\mathbf{ad}}$: $h(u,v) = \langle u, f(v) \rangle$
Beweis:
Vorüberlegung zur Gestalt von f **(wenn es** f **gäbe, so sähe es folgendermaßen aus):**
Wähle dazu Orthonormalbasis $\mathfrak{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ **mit**

$$\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f) = \left(\boxed{\alpha_{ij}} \right), \quad f(v_j) = \sum_i \alpha_{ij} \cdot v_i$$

Dann folgt: $\langle v_i, f(v_j) \rangle = \alpha_{ij}$, **weil** $\mathfrak{A}$ **eine Orthonormalbasis ist. Nach Annahme ist** $\langle v_i, f(v_j) \rangle = h(v_i, v_j)$. **Daher: Falls** f **mit der gewünschten Eigenschaft existiert, so muß** $\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f) = \left(\boxed{h(v_i, v_j)} \right) = \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(h)$ **sein, insbesondere ist** f **eindeutig bestimmt.**
Existenz:
Wir definieren f: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ **durch** $\mathbf{M}_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(f) := \mathbf{M}^{\mathfrak{A}}(h)$. **Dann folgt aus der Definition:**

$$\langle v_i, f(v_j) \rangle = h(v_i, v_j) \quad \textbf{für } i, j = 1, \ldots, n$$

Zu zeigen: $\langle u, f(v) \rangle = h(u,v)\ \forall u, v \in \mathbf{V}$. **Nachweis durch Darstellung von** u, v **in der Basis** $(v_1, \ldots, v_n)$ **durch Verwendung von** $\langle v_i, f(v_j) \rangle = h(v_i, v_j)$, $f = f^{\mathbf{ad}}$, **weil** h **symmetrisch beziehungsweise hermitesch.**

5.4.29 Beweis ($\mathbf{V}$.4.4.c) $\Rightarrow$ ($\mathbf{V}$.4.4.a)

Wir wissen jetzt: $h(u,v) = \langle u, f(v) \rangle$, $f = f^{\mathbf{ad}}$. **Nach** ($\mathbf{V}$.4.4.c) **existiert Orthonormalbasis** $(v_1, \ldots, v_n)$ **mit** $f(v_i) = \lambda_i \cdot v_i$ **mit** $\lambda_i \in \mathbb{R}$
Behauptung: Diese Orthonormalbasis ist Orthogonalbasis für h, **denn**

$$h(v_i, v_j) = \langle v_i, f(v_j) \rangle = \langle v_i, \lambda_j \cdot v_j \rangle = \lambda_j \cdot \langle v_i, v_j \rangle = \lambda_j \cdot \delta_{ij}$$

5.4.30 Absoluter Beweis der Hauptachsentransformation ($\mathbf{V}$.4.4)

Wir werden die Fassung ($\mathbf{V}$.4.4.b) **beweisen**
Zuerst: Analyse der Aussage
Angenommen es sei schon bewiesen, daß A **eine Orthonormalbasis** $(v_1, \ldots, v_n)$ **aus Eigenvektoren mit reellen Eigenwerten** $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ **hat. Sei** $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$. **Nun gilt:**

$$\langle x, Ax \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i, A \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \right) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i, \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \lambda_i \cdot v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i^2$$

Da wir die Eigenwerte schon der Größe nach sortiert haben können wir die Summe mit dem kleinsten Eigenwert λ_1 **abschätzen:**

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 \cdot x_i^2 = \lambda_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda_1 \cdot \langle x, x \rangle$$

⌈ **Nebenrechnung:** $\left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i, \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, **weil** $v_1, \ldots, v_n$ **Orthonormalbasis ist** ⌋

Daher $\forall x$**:** $\langle x, Ax\rangle \geq \lambda_{\mathbf{min}} \cdot \langle x, x\rangle$**, Gleichheit für** $x = v_1$**. Daher:**

$$\lambda_{\mathbf{min}} = \min_{x\neq 0} \underbrace{\frac{\langle x, Ax\rangle}{\langle x, x\rangle}}_{(*)}$$

$(*)$ **wir als Rayleigh-Quotient bezeichnet und hat Bedeutung in der Numerik bei der Eigenwertberechnung.**

<u>Ansatz zum Beweis</u>

(1) Beweise: es existiert $\min\limits_{x\neq 0}\frac{\langle x, Ax\rangle}{\langle x, x\rangle} = \frac{\langle \overline{v_1}, A\overline{v_1}\rangle}{\langle \overline{v_1}, \overline{v_1}\rangle} = \lambda_1 \in \mathbb{R}$

(2) Zeige, daß eine Minimalität impliziert $A \cdot \overline{v_1} = \lambda_1 \cdot \overline{v_1}$

(3) Setze $v_1 := \frac{\overline{v_1}}{\|\overline{v_1}\|}$**, Ergänze** $v_2, \ldots, v_n$ **zu einere Orthonormalbasis.** $\mathbf{S}^{-1}$ **Matrix des Basiswechsels,** $\mathbf{S} \in \mathcal{O}(n)$ **beziehungsweise** $\mathbf{S} \in \mathcal{U}(n)$ **und:**

$$\overline{\mathbf{S}}^T \cdot A \cdot \mathbf{S} = v_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{pmatrix}$$

B symmetrisch beziehungsweise hermitesch. Durch Rekursion folgt die Behauptung.

Bemerkung: (1) **und** (2) **implizieren:** A **hat Eigenvektor zu reellen Eigenwerten.**
Alternativer Beweis: Fundamentalsatz der Algebra und Aufgabe 44 / LinA II

Zu (1)**: Für** $x \neq 0$ **ist** $\frac{\langle x, Ax\rangle}{\langle x, x\rangle} = \left\langle \frac{x}{\|x\|}, A \cdot \frac{x}{\|x\|} \right\rangle$ **und** $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$.

Das heißt: $\left\{ \frac{\langle x, Ax\rangle}{\langle x, x\rangle} \middle| x \neq 0 \right\} = \{ \langle x, Ax\rangle | \, \|1\| = 0\}$

In $\mathbb{R}^n$**:**

$\mathbb{R}^n \supseteq \{x | \, \|x\| = 1\} = \left\{ x \middle| \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\} =: \mathbf{S}^{n-1}$ $((n-1)$**-dimensionale Sphäre)**

Beispiel für Sphären:

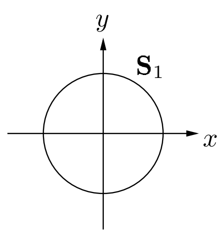

Abbildung V-5: $\mathbf{S}^1$

Für $n = 2$ **erhalten wir die Punkte auf dem Einheitskreis, für** $n = 3$ **erhalten wir die Punkte auf der Kugeloberfläche.**

$\mathbf{S}^{n-1}$ **ist kompakt, das heißt: Jede Folge in** $\mathbf{S}^{n-1}$ **hat eine in** $\mathbf{S}^{n-1}$ **konvergente Teilfolge. Nach Heine-Borel folgt:** $\mathbf{S}^{n-1}$ **ist beschränkt und abgeschlossen.**

In $\mathbb{C}^n$:

$$\mathbb{C}^n \supseteq \left\{ z = (z_1, \ldots, z_n) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \overline{z_i} \cdot z_i = 1 \right\} = \left\{ z = (\ldots, u_k + i \cdot v_k, \ldots) \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} u_k^2 + v_k^2 = 1 \right\} = \mathbf{S}^{2n-1}$$

In beiden Fällen sind $\mathbf{S}^* = \{\|x\| = 1\}$ kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ beziehungsweise $\mathbb{C}^n$.
Nun betrachten wir Abbildung $\mathbf{S}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle x, Ax \rangle$ ist stetig, da es sich um quadratische Polynome in den Koordinaten handelt.
Bilanz: In (1) haben wir damit gezeigt:

(i) $\forall x \in \mathbb{K}^n$ **gilt:** $\langle x, Ax \rangle \geq \lambda \cdot \langle x, x \rangle$ **für** $\lambda \in \mathbb{R}$

(ii) $\exists v$**:** $\langle v, Av \rangle = \lambda$, $\|v\| = 1$

Zu (2)**:** $\mathbb{K}^n = (\mathbb{K} \cdot v) \perp \mathbf{U}$ **bezüglich des Standardskalarprodukts**
Zu zeigen: $A \cdot \mathbf{U} \subseteq \mathbf{U}$, $A \cdot v = \lambda \cdot v$ **(**$\Rightarrow$ **Schritt** (3)**)**
Beweis: $\forall u \in \mathbf{U}$**:**

$$\langle v + u, Av + Au \rangle \geq \lambda \cdot \langle v + u, v + u \rangle = \lambda \cdot (\langle v, v \rangle + \langle u, u \rangle)$$

Analog zum Beweis von Cauchy-Schwarz, $\Rightarrow \quad A \cdot v = \lambda \cdot v,\ A \cdot \mathbf{U} \subseteq \mathbf{U}$
Bemerkung: Dieser Beweis zeigt die Existenz von n (reellen) Nullstellen von χ_A. Wir haben damit einen Spezialfall des Fundamentalsatzes der linearen Algebra bewiesen.

5.5 Kapitel (V.5): Moore-Penrose-Inverse

5.5.1 Problemstellung

Das Gleichungssystem $Ax = b$ sei zu lösen, bei unsicheren Daten (zum Beispiel aus einem physikalischen Experiment). Da in einem Rechner zum Großteil Fließkommazahlen benutzt werden, treten häufig folgende Probleme auf:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 10^{-2000} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{rg}\,(\cdot)=3} \approx \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{rg}\,(\cdot)=2}$$

Damit ist in unserem Beispiel die Lösbarkeit nicht mehr gegeben.

Im Allgemeinen ist $Ax = b$ bei unsicherer Datenlage nicht lösbar! Stattdessen suchen wir ein x, so daß Ax möglichst nahe an b liegt. Solche Lösungen sind Approximationslösungen.

Man nehme die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$. Dann:

$$\|Ax - b\| = \min_y \|Ay - b\|$$

Frage: Gibt es ausgezeichnete approximative Lösungen?

Die Antwort ist natürlich Ja: $\mathbf{MP}\,(A)\,(b)$. Diese Problemstellung wird in tieferem Detail in der Numerik behandelt.

5.5.2 Allgemeiner Rahmen

Sei f: $\mathbf{V} \to \mathbf{W}$, wobei $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ euklidische beziehungsweise unitäre Vektrorräume seien.

Zerlegung XYPic

Behauptung: f_0 ist bijektiv. (Zusatzaufgabe 13: Unter anderem über Dimensionsformeln zu beweisen) $\quad\Rightarrow\quad$ g_0: $\mathbf{Bild}\,(f) \to (\mathbf{Kern}\,(f))^\perp$, $g_0 = f_0^{-1}$

$g := \mathbf{MP}\,(f)$: $\mathbf{W} \to \mathbf{V}$, $w = u_1 + u_2$, $u_1 \in (\mathbf{Bild}\,(f))^\perp$, $u_2 \in \mathbf{Bild}\,(f)$

$g\,(w) = g_0\,(u_2) = f_0^{-1}\,(u_2) \in \mathbf{V}$

5.5.3 Satz (V.5.1): Moore-Penrose-Inverse

(i) Sei $b \in \mathbf{V}$. $\mathbf{MP}\,(f)\,(b)$ ist eine approximative Lösung von $f\,(x) = b$, daß heißt:

$$\|f\,(\mathbf{MP}\,(f)\,(b)) - b\| = \min_{x \in \mathbf{V}} \|f\,(x) - b\|$$

Insbesondere: Falls $f\,(x) = b$ lösbar ist, so ist $x = \mathbf{MP}\,(f)\,(b)$ eine Lösung.

(ii) $\mathbf{MP}\,(f)\,(b)$ ist die (es gibt nur eine) approximative Lösung mit kleinster Abweichung über die Norm (bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ von $\mathbf{V}$) gemessen.

Hier kein Beweis.

Tip: Beweis erfolgt über den Satz des Pythagoras:

$$u \perp v \quad\Rightarrow\quad \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

da $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$

5.5.4 Praktische Anwendung

Es gibt numerisch stabile und instabile Lösungsverfahren:

(1) Numerisch stabile Berechnung erfolgt über Singularitätswertzerlegung von A (hier nicht behandelt, sondern in der Numerik)

(2) Numerisch instabile Berechnung über lineare Gleichungssysteme.

Wir wollen nun nur (2) betrachten:
Sei $A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, A: $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.
(I) Wir wissen: $\mathbb{K}^n = \mathbf{Kern}(A) \perp (\mathbf{Kern}(A))^\perp$. Das heißt, man bestimmt eine Basis des Lösungsraumes von $Ax = 0$: $v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{r+1}$, wobei $\mathbf{rg}(A) = r$. Man erhält eine Basis $v_1, \ldots, v_r$ von $(\mathbf{Kern}(A))^\perp$ durch das Gleichungssystem:

$$\langle x, v_n \rangle = \langle x, v_{n-1} \rangle = \ldots = \langle x, v_{r+1} \rangle = 0$$

(II) Laut Theorie: $Av_1, \ldots, Av_r$ ist eine Basis von $\mathbf{Bild}(A)$. Bestimme die Basis $w_{r+1}, \ldots, w_n$ von $(\mathbf{Bild}(A))^\perp$durch das Gleichungssystem:

$$\langle y, Av_1 \rangle = \langle y, Av_2 \rangle = \ldots \langle y, Av_r \rangle = 0$$

Dann ist $w_{r+1}, \ldots, w_n, Av_1, \ldots, Av_r$ eine Basis von W.
(III) Es gilt:

$$\mathbf{MP}(A)(w_{r+1}) = \mathbf{MP}(A)(w_{r+2}) = \mathbf{MP}(A)(w_m) = 0$$
$$\mathbf{MP}(A)(v_i) = v_i \quad \textbf{für } i = 1, \ldots, r$$

Die darstellende Matrix hat nun die folgenden Eigenschaften:

$$B \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ w_{r+1} & \cdots & w_m & Av_1 & \cdots & Av_r \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}}_{\doteqdot \mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \cdots & 0 & v_1 & \cdots & v_r \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

wobei wir $(m - r)$ Spalten mit Nullen erhalten. Zudem ist S eine reguläre Matrix, da es sich bei den Spaltenvektoren um eine Basis handelt. Lösen wir nun nach B auf, so erhalten wir:

$$B = \mathbf{MP}(A) = \begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \cdots & 0 & v_1 & \cdots & v_r \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \cdot \mathbf{S}^{-1}$$

Bemerkungen:

(i) $Ax = b$ **lösbar** $\Rightarrow$ $\mathbf{MP}(A)(b)$ **ist eine Lösung**

(ii) A **invertierbar** $\Rightarrow$ $\mathbf{MP}(A) = A^{-1}$