Funktionentheorie I

Kurzskriptum nach einer Vorlesung von
Professor Dr. K. Menke

Universität Dortmund – Sommersemester 1998

Letzte Änderung: 18. April 2004

Dieses Kurzskript ist aus meiner persönlichen Mitschrift der Vorlesung

Funktionentheorie I

bei *Professor Dr. K. Menke* im Sommersemester 1998 entstanden. Ich habe versucht alles richtig wiederzugeben, kann allerdings keine Garantie darauf geben. Es ist deshalb wahrscheinlich, daß dieses Skriptum Fehler enthält.

 Dieses Skriptum ist weder eine offizielle noch eine von *Professor Menke* autorisierte Version. Deshalb ist bei Fehlern zuerst davon auszugehen, daß diese von mir stammen.

Ingo Manfraß

Inhaltsverzeichnis zu Funktionentheorie I

I. Komplexe Zahlen und Funktionen

1.1. Struktur der Komplexen Zahlen und ihre Darstellung

C: Menge der komplexen Zahlen.
Die komplexen Zahlen bilden einen (vollständigen) Körper

Ordnung: $P \subset \mathbf{R}$
(i) für jedes $a \in \mathbf{R}$ gilt genau eine der drei Aussagen:
1. $a \in P$,
2. $a = 0$
3. $-a \in P$

(ii) $a \in P$, $b \in P \Rightarrow a + b \in P$, $a\,b \in P$
Elemente von P heißen positiv
=> **R** ist ein angeordneter Körper (**C** nicht)

1.2. Riemannsche Zahlenkugel, chordale Metrik

Idee: zur Menge **C** ein Punkt „∞“
2 Wege: - ein-Punkt-Kompaktifizierung
- stereographische Projektion

I Ein – Punkt – Kompaktifizierung von Alexandroff

X = lokalkompakter topologischer Raum
$Y := X \cup \{\infty\}$

X topologischer Raum, $\phi: X \to Y$ bijektive Abb. (Y irgendeine Menge)
- heißt offen in Y $\Leftrightarrow$ $\phi^{-1}(O)$ offen in X
- X metrischer Raum, auf Y wird Metrik induziert:

$$d(z,z') := \rho\,(\phi^{-1}(z), \phi^{-1}(z'))$$

Durch diese Anwendung auf
$S^2: \; x_1^2 + y_1^2 + (z_1 - \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4}$ (Radius ½)

Man ordnet jedem P auf der Sphäre S^2, $P \neq N$ den Bildpunkt z zu, den man als „Auf-punkt“ der Geraden durch N und P in der x_1-y_1-Ebene erhält. Dem Punkt N ordnet man den idealen Punkt „∞“ zu.

$$\phi: S^2 \to \hat{C} := \mathbf{C} \cup \{\infty\}$$

Benutze für $\phi(x_1, y_1, z_1) = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1}{1-z_1} \\ \dfrac{y_1}{1-z_1} \end{pmatrix}$

$\varphi := \phi^{-1}$ $\quad \varphi(z) = \dfrac{1}{1+|z|^2}(\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z, |z|^2)$. Damit $\phi(0,0,1) = \infty$

Die Metrik auf **C**:

Sei ρ die euklidische Metrik im $\mathbf{R}^3$ und d: $\hat{C} \times \hat{C} \to \mathbf{R}$ durch d(z, z') = ρ(φ(z), φ(z')), wobei φ die Umkehrfunktion der stereographischen Projektion ist. d ist eine Metrik und wird chordale Metrik genannt. d(z,z') ≤ 2 (da sie nur auf der Sphäre lebt)

Satz: $\hat{C}$ und S^2 sind homöomorph.

Folgerung: $\hat{\mathbf{C}}$ ist ein kompakter metrischer Raum.

Satz: Sei $O \subset \mathbf{C}$. Dann:

O ist offen bzgl. **C** (euklidische Metrik) ⇔ O ist offen bzgl. **C** (chordale Metrik)

1.3. Zusammenhang

(X,d), (Y,ρ) metrische Räume

Definition: Eine Menge $A \subset X$ heißt zusammenhängend in X, wenn es keine in X offenen Mengen O_1, O_2 gibt, für die $O_1 \cap A$ und $O_2 \cap A$ nicht leer sind und die $O_1 \cap O_2 \cap A = \emptyset$, $A \subset O_1 \cup O_2$ erfüllen.

- A zusammenhängend, $A \subset B \subset \overline{A} \Rightarrow$ B zusammenhängend
-]a,b[zusammenhängend in **R**
- $A \subset X$, A zusammenhängend und f: A → Y stetig ⇒ f(A) zusammenhängend

Satz: Sei Λ eine beliebige Indexmenge, A_λ, $\lambda \in \Lambda$ seien zusammenhängende Teilmengen von X, wobei $A_\lambda \cap A_\mu \neq \emptyset$ für $\lambda, \mu \in \Lambda$ gilt.

Dann ist auch $A := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ zusammenhängend.

Definition: Sei $A \subset X$. Für $x \in A$ sei L(x) die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen von A, die x enthalten. Dann heißt L(x) Zusammenhangskomponente von A.

Folgerung: Es ist L(x) zusammenhängend und es gilt $A = \bigcup_{x \in A} \mathrm{L}(x)$, wobei entweder L(x)=L(y) oder $\mathrm{L}(x) \cap \mathrm{L}(y) = \emptyset$ für $x, y \in A$ gilt.

Definition: Sei a<b, $A \subset X$ beliebiger metrischer Raum.

Sei p: [a,b] → A eine stetige Funktion, dann heißt p ein Weg in A. p(a) heißt Anfangspunkt, p(b) heißt Endpunkt des Weges.

|p|:=p([a,b]) heißt der Träger (die Spur) des Weges.

Ein Weg heißt geschlossen, wenn p(a)=p(b) ist.

Bemerkung:

1. Der Träger eines Weges ist kompakt und zusammenhängend.
2. Sei $A \subset X$. Dann sei für $x, y \in A$ erklärt
   x~y ⇔ es gibt einen Weg p: [0,1] → A mit p(0)=x und p(1)=y.
   „x und y sind durch einen Weg in A verbindbar."

Satz: „~" ist eine Äquivalenzrelation.

Die Äquivalenzklassen heißen Wegkomponenten von A.

Gibt es nur eine Wegkomponente von A, so heißt A wegzusammenhängend.

Hinweis: Wege sind im allgemeinen nicht das, was sie anschaulich sind. (z.B. 2-dim Flächen); es ist nur die Stetigkeit verlangt.

A wegzusammenhängend :⇔ je zwei Punkte aus A lassen sich in A durch einen Weg verbinden.

Satz: Jede Wegkomponente ist wegzusammenhängend.

Ab jetzt: X=**C** versehen mit euklidischer Metrik

$X=\hat{\mathbf{C}}$ versehen mit chordaler Metrik

Satz: Sei A eine offene Teilmenge von X.
Dann sind die Wegkomponenten von A auch offen.

Satz: Sei A eine offene Teilmenge von X.
Es ist A genau dann zusammenhängend, wenn A wegzusammenhängend ist.

Folgerung 1: Ist A wegzusammenhängend, so ist A zusammenhängend.

Folgerung 2: Sei A offen. Dann ist auch jede Zusammenhangskomponente von A offen und die Zusammenhangskomponenten stimmen mit den Wegkomponenten überein.

Definition: Sei $A\subset\mathbf{C}$, p: $[a,b] \to A$ ein Weg in A.
Wenn es eine Zerlegung $\{a=t_0,t_1,...,t_n=b\}$ des Grundintervalls [a,b] gibt, so daß $p([t_{i-1},t_i])$ für i=1,...,n eine (achsenparallele) Strecke in **C** ist, so heißt p ein (achsenparalleler) Polygonzug in A.

Hinweis: p: $[a,b] \to x_0\in A$ ist zugelassen.

Satz: Sei $A\subset\mathbf{C}$, A offen. Dann gilt:
Es ist A genau dann zusammenhängend, wenn je zwei beliebige Punkte aus A durch einen (achsenparallelen) Polygonzug in A verbunden werden können.

Definition: Sei $G\neq\emptyset$, $G\subset\hat{\mathbf{C}}$ offen und zusammenhängend.
Dann heißt G ein Gebiet.

Satz: Sei $G\neq\emptyset$. $G\subset\mathbf{C}$.
Dann ist G genau dann ein Gebiet, wenn G offen und zusammenhängend in **C** ist (bzgl. euklidischer Metrik)

$G \subset \mathbf{C}$, G ein Gebiet, dann heißt G auch ein endliches Gebiet

Satz: Sei $A \subset X$, A offen. Dann sind die Komponenten von A Gebiete. A ist darstellbar als höchstens abzählbare Vereinigung von disjunkten Gebieten.

1.4. Holomorphe Funktionen

C versehen mit euklidischer Metrik

$\hat{\mathbf{C}}$ versehen mit chordaler Metrik

Definition: $a \in \hat{\mathbf{C}}$ heißt Grenzwert von f in z_0, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert,

so daß für alle $z \in D\setminus\{z_0\} \cap \hat{K}_\delta(z_0)$ gilt: $f(z) \in \hat{K}_\varepsilon(a)$.

(z_0, a endlich, d.h. aus **C**, $\hat{K}_\delta(z_0)$ kann ersetzt werden durch $K_\delta(z_0)$ werden.

Definition: Sei $G \subset\mathbf{C}$ eine offene Menge. Dann heißt f: $G \to \mathbf{C}$ in z_0 komplex differenzierbar, wenn es ein $a \in \mathbf{K}$ gibt mit $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = a$. a heißt die

Ableitung von f im Punkte z_0 und man schreibt $f'(z_0) = a$.
f heißt <u>holomorph</u> in G, wenn f in jedem Punkt von G komplex differenzierbar ist.
(es gilt wegen unterschiedlichen Herleitungen: holomorph = analytisch = regulär = regulär analytisch)

Eigenschaften:

- Ist f in z_0 komplex diffbar, dann ist f in z_0 stetig
- $(cf)'(z_0) = c f'(z_0)$
- $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$

Beispiele: Polynome, rationale Funktionen

Satz: (Cauchy – Riemann DGL)
Sei $G \subset \mathbf{C}$ offen. Dann ist f: $G \to \mathbf{C}$ $f(z) = u(x, y) + i\, v(x,y)$ $(z = x + iy \in G)$ in $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$ genau dann komplex diffbar, wenn u und v in (x_0, y_0) reell differenzierbar sind und für die partiellen Ableitungen gilt:
$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$ und $v_x(x_0, y_0) = - u_y(x_0, y_0)$.
Die partiellen DGL $u_x = v_y$ und $v_x = - u_y$ heißen Cauchy – Riemann – DGL.

Definition: Sei G eine offene Menge im $\mathbf{R}^2$
a) g: $G \to \mathbf{R}$ sei zweimal stetig partiell diffbar und es sei $\Delta g = 0$ $(\Delta g = g_{xx} + g_{yy})$, dann heißt g <u>harmonisch</u> in G.
b) Sei u harmonisch in G. Dann heißt v: $G \to \mathbf{R}$ <u>konjugiert harmonisch</u> zu u, falls f: $G \to \mathbf{C}$ mit $f = u + iv$ holomorph zu G ist.

Beispiele

Identitätssatz für Potenzreihen

Seien $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ konvergent in { |z|<r }. Sei (z_k) eine Folge mit $0<|z_k|<r$ $\lim_{k\to\infty} z_k=0$ und $f(z_k)=g(z_k)$ für k=0,1,...
Dann gilt: $a_n=b_n$ für n=0,1,... und somit $f(z)=g(z)$ für |z|<r.

Beispiele für Potenzreihen

$e^z=\exp(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ holomorph in **C**.
$|e^z|=e^{\mathrm{Re}(z)}$
$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ beide holomorph in **C**.
wobei: $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$
sin: ungerade Funktion
cos: gerade Funktion
$\cos\omega=0 \Leftrightarrow \omega=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$, $k\in \mathbf{Z}$
$\sin\omega=0 \Leftrightarrow \omega=k\cdot\pi$, $k\in \mathbf{Z}$
$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ holomorph in $\mathbf{C}\setminus\{ \frac{\pi}{2}+n\cdot\pi \mid n\in \mathbf{Z} \}$
$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$ holomorph in $\mathbf{C}\setminus\{ n\cdot\pi \mid n\in \mathbf{Z} \}$

Entwicklung des Logarithmus
Umkehrung von e^z auf:
$G_0=\{ z\in \mathbf{C} \mid -\pi\le \mathrm{Im}(z)<\pi \}$
$\log(\omega)=\log|\omega|+i\cdot \mathrm{Arg}(\omega)$, $-\pi\le \mathrm{Arg}(\omega)<\pi$
nicht stetig
$G_k:=\{ z\in \mathbf{C} \mid (2k-1)\pi\le \mathrm{Im}(z)<(2k+1)\pi \}$
(Idee der Riemann‘schen Flächen (analytische Manigfaltigkeit))
$B_k:=\exp(G_k))=\mathbf{C}\setminus\{0\}$
e^z: $\mathbf{C} \to B = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} B_k$, B_k Blätter

p Jordankurve: Jordansche Kurvensatz

Satz: $\mathbf{C}\setminus|p|$ zerfällt in genau zwei Gebiete, das Innengebiet und das Außengebiet.
Bemerkung: f holomorph, $f'(z)\neq 0$
$q=f\circ p$ neuer Weg. $q'(t)=f'(p(t))p'(t)\neq 0$

II. Eigenschaften holomorpher Funktionen

2.1. Winkeltreue

Definition: Sei p. $[a,b] \to \mathbf{C}$ ein Weg.
(i) p heißt ein Jordanbogen, wenn p eine injektive Abbildung ist.
(ii) p heißt ein Jordankurve, wenn p geschlossen ist und p injektiv in $[a,b[$ ist.
(iii) p heißt glatter Weg, falls p stetig differenzierbar ist und $p'(t)\neq 0$ für $t\in[a,b]$ ist.
(in der Literatur nicht eindeutige Begriffswahl)
Bemerkung: Winkel zwischen den Wegen p_1 und p_2 im Schnittpunkt z_0.

$p_j(t)=|p_j'(t)|\cdot e^{i\psi_j}$, $0\leq t<\infty$, $\gamma:=\psi_2-\psi_1$
$\psi_j'=\operatorname{Arg}(f'(p(t_j))\cdot p'(t_j))$, $\gamma'=\psi_2'-\psi_1'$

Satz: Sei f im Gebiet $G\subset\mathbf{C}$ holomorph, $z_0\in G$ und $f'(z_0)\neq 0$.
Sei γ der Winkel zwischen zwei glatten Kurven p_1 und p_2 mit Schnittpunkt z_0.
Dann gilt für den Winkel γ' zwischen den Bildkurven $f\circ p_1$ und $f\circ p_2$ in $f(z_0)$:
$\gamma'\equiv\gamma \pmod{2\pi}$ (Winkeltreue).

2.2. Lineare Abbildungen

I ganze lineare Abbildungen

ganze lineare Abbildung: $f(z) = az + b$
Eigenschaften:
1) $a = 1$ $f(z) = z + b$ (Translation)
2) $b = 0, a > 0$ $z = r e^{i\varphi}$; $f(z) = (a r) e^{i\varphi}$ Stauchung / Streckung
3) $b = 0, a = e^{i\alpha}$ ($\alpha \in \mathbf{R}$) $f(z) = r e^{i(\varphi+\alpha)}$ Drehung um α

Hinweis: Man kann jede ganze lineare Abbildung als Komposition von Drehungen, Steckungen oder Stauchungen und Translationen darstellen.
$g(z) = e^{i\alpha} z$
$h(z) = |a|\, z$
$r(z) = rz + b$
$\Rightarrow$ $r(h(g(z))) = f(z)$

II gebrochen lineare Abbildungen

$S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ $a, b, c, d \in \mathbf{C}$
Eigenschaften:
1) $c \neq 0$ => $S(z) = \frac{bc-ad}{c^2z+dc}+\frac{a}{c}$

Sei $bc - ad \neq 0$ (sonst $S(z) = \frac{a}{c}$ konst. Abbildung)
Wie bei ganzen linearen Abbildungen gilt, daß sich S darstellen läßt als Komposition von Abbildungen:
$S = t \circ g \circ T$, wo T, t ganze lin. Abbildungen sind und $g(z) = \frac{1}{z}$

Hinweis: g heißt auch **Inversion** (am Einheitskreis), da g: $\hat{\mathbf{C}} \to \hat{\mathbf{C}}$ bijektiv, stetig, Winkeltreu in $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Es gilt mit $D = \{|z| < 1\}$, $\Delta = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| > 1\}\cup\{\infty\}$
$g(D) = \Delta$.

2) c = 0, dann $S(z) = \frac{az+b}{d}$ ganze lin. Abb.

Fall: ad – bc = 0, d.h. ad = 0 , dann S konstant (entweder a= 0: b/d oder d=0: ∞)

Fall: ad – bc ≠ 0 S: : $\hat{\mathbf{C}} \to \hat{\mathbf{C}}$

Man setzt $S\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty, S(\infty) = \frac{a}{c}$, dann S bijektiv

Definition: Abbildungen S der Form $\frac{az+b}{cz+d}$ mit ad – bc ≠ 0 heißen Möbius – Transformationen (oder nicht triviale gebrochene lineare Abbildungen)

Satz: Geraden oder Kreise gegen über in Geraden oder Kreise bei diesen Abbildungen.

Satz: Die Möbius – Transformationen bilden bzgl. der Komposition eine Gruppe.

Satz: Die Möbius – Transformationen $S(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ sind in $\mathbf{C}\backslash\left\{\frac{-d}{c}\right\}$ holomorph und winkeltreu und S: $\hat{\mathbf{C}} \to \hat{\mathbf{C}}$ bijektive stetige Abbildung.

Satz: Es gibt genau eine Möbius – Transformation, die drei verschiedene gegebene Punkte aus $\hat{\mathbf{C}}$ in drei verschiedene Punkte aus $\hat{\mathbf{C}}$ abbildet.

Satz: Eine Möbius – Transformation mit 3 Fixpunkten ist die Identität.

Beispiele: 1. Abbildungen vom Kreis auf den Kreis

2. Abbildungen vom Kreis auf die Gerade

2.3. Kurvenintegrale

Sei w: [a, b] → **C** w(t) = u(t) + iv(t)

Seien u, v integrierbare Funktionen, dann sei

$$\int_a^b w(t)dt := \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$$

Es gilt:

Linearität

HDI: Ist F'(t) = w(t) für t ∈ [a, b] dann $\int_a^b w(t)dt = F(b) - F(a)$

Abschätzungsregel: a ≤ b, dann $\left|\int_a^b w(t)dt\right| \le \int_a^b |w(t)|dt$

Definition: Ein Weg γ: [a,b] → **C** heißt stückweise stetig differenzierbar, wenn es eine Zerlegung { $a=t_0,t_1,...,t_n=b$ } von [a,b] gibt, so daß γ stetig differenzierbar ist in $]t_\nu,t_{\nu+1}[$ (ν=0,...,n-1) und $\lim_{t\uparrow t_\nu}\gamma'(t)$, $\lim_{t\downarrow t_\nu}\gamma'(t)$ (ν=0,...,n) existieren.

Sei f: |γ| → **C** stetig, dann sei

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt := \sum_{\nu=0}^{n-1}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

Definition: Sei f: [α,β] → [a,b] stetig monoton wachsend und in demselben Sinne <u>stückweise stetig differenzierbar</u> wie γ in der vorigen Definition.

Sei φ(α)=a, φ(β)=b.

Dann heißt φ eine Parametertransformation.

Satz: Sei γ. [a,b] → **C** ein stückweise stetig differenzierbarer Weg und φ: [α,β] → [a,b] eine Parametertransformation.

Dann ist auch $\gamma^*: [\alpha,\beta] \to \mathbf{C}$, $\gamma^*(t):=\gamma(\varphi(t))$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg und es ist

$$\int_{\gamma^*} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$$

Äquivalenzrelation

$\gamma^* \sim \gamma$, falls $\gamma^*=\gamma\circ\varphi$, φ=Parametertransformation

$C:=\{ \gamma^* \mid \gamma^* \sim \gamma \}$ heißt Kurve

Definition: $\int_C f(z)\,dz := \int_\gamma f(z)\,dz$

Definition: Ist $\gamma: [a,b] \to \mathbf{C}$ ein Weg, so setzt man

$\gamma_-: [a,b] \to \mathbf{C}$ mit $\gamma_-(t)=\gamma(a+b-t)$

Seien $\gamma_1: [a,b] \to \mathbf{C}$, $\gamma_2: [c,d] \to \mathbf{C}$ zwei Wege mit $\gamma_1(b)=\gamma_2(c)$

Dann setzt man

$\gamma_1\oplus\gamma_2: [a,b+d-c] \to \mathbf{C}$

mit

$$\gamma_1 \oplus \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & ,a \le t \le b \\ \gamma_2(t-b+c) & ,b \le t \le b+d-c \end{cases}$$

Satz

(i) $\int_{\gamma_-} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$

(ii) $\int_{\gamma_1\oplus\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$

$\gamma\oplus\gamma_-$ ist wohldefiniert als <u>Kurve</u>.

$$\int_{\gamma\oplus\gamma_-} f(z)\,dz = 0$$

Definition: Sei $f: |\gamma| \to \mathbf{C}$ stetig, dann sei erklärt

$$\int_\gamma f(z)\,|dz| := \int_a^b f(\gamma(t))\cdot|\gamma'(t)|\,dt$$

Satz: Sei $f: |\gamma| \to \mathbf{C}$ stetig, dann sei erklärt

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \int_\gamma \left|f(z)\right|\,|dz|$$

Anwendung: $|f(z)|\le M$ für $z\in|\gamma|$

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le M \cdot \underbrace{\int_\gamma |dz|}_{=l(y)}$$ l(y): Länge von γ (Bogenlänge)

Definition: Sei $G\subset\mathbf{C}$ ein Gebiet, sei $f: G \to \mathbf{C}$ eine Abbildung.

Gibt es eine in G holomorphe Funktion g mit

$g'(z)=f(z)$ für $z\in G$,

so heißt g Stammfunktion von f.

Anmerkung: Mit Wegen sind ab jetzt immer stückweise stetig differenzierbare Wege gemeint.

Satz: Sei $\gamma: [\alpha,\beta] \to G$ ein Weg, sei g in G Stammfunktion des in G stetigen f.

Dann gilt:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = g(\gamma(\beta)) - g(\gamma(\alpha))$$

Bemerkung: Nur abhängig von Anfangs- und Endpunkt, <u>nicht</u> vom Verlauf der Kurve. Ist γ geschlossener Weg, dann $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Schreibweise: $\int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz := \int_\gamma f(z)\,dz$, $\gamma(t)=z_0+r\cdot e^{it}$, $0\le t\le 2\pi$

positiv orientierter Kreis mit Radius r.

Beispiele: γ geschlossener Weg

a) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, konvergent in |z|<r

Somit $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ in G=$K_r(0)$.

b) G=**C**\{0} „punktierte Ebene“

$\int_{|z|=r} z^{-n}\,dz = 0$, n=2,3,...

c) n=1: $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 0$ in G=**C****R**$^-$

aber: $\int_{|z|=r} \frac{dz}{z} = 2\pi i$

Anmerkung: Stammfunktionen unterscheiden sich nur durch Konstanten.

2.4. Der Cauchysche Integralsatz für Sterngebiete

Methode von Goursat

Satz: (Cauchyscher Integralsatz für Dreiecke)
Sei f holomorph im Gebiet G und sei Δ ein Weg, $|\Delta|$ sei ein Dreieck, dessen abgeschlossenes Inneres in G liegt.
Dann ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0\,.$$

Definition: Ein Gebiet heißt Sterngebiet (oder sternförmig) bzgl. a $\in$ **C**, wenn für z $\in$ G auch die Verbindungsstrecke [a,z] $\subset$ G ist.

Satz: Sei G ein Gebiet bzgl. a. Jede in G holomorphe Funktion hat dann eine Stammfunktion g in G und zwar gilt:

$g(z) = \int_{\gamma_z} f(s)ds$, wobei γ_z der von a nach z geradlinig verlaufende Weg ist.

Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete

Satz: Sei f holomoph im Sterngebiet G und sei γ ein geschlossener Weg in G.
Dann ist $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Cauchysche Integralformel

1. Version: Sei f holomorph im Gebiet G $\subset$ **C**. Sei $\overline{K_r(z_0)} \subset G$, dann gilt für z $\in$ $K_r(z_0)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s-z_0|} f(s) \cdot \frac{1}{s-z} ds\,,$$

wo man $\frac{1}{s-z}$ als den Cauchy – Kern bezeichnet.

Bemerkung: Die erste Version der Cauchyschen Integralformel besagt:
Kennt man Werte einer Funktion f auf dem Rand einer Kugel, so ist f eindeutig bestimmt in den Werten der ganzen Kugel.

2.5. Taylorentwicklung

A **Satz über Taylorreihe**

Sei f holomorph im Gebiet G⊂**C**, sei $\overline{K_r(z_0)} \subset$G.
Dann ist

(#) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ für z∈$K_r(z_0)$,

wobei

$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$ ist. (n=0,1,2,...)

B **Bemerkung 1**: Konvergenzradius der Reihe in (#) mindestens r.

C **Bemerkung 2**: $f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

Konvergenzradius 1 (reell analytisch)

(Unterschied zu **C**: Taylorreihe konvergiert in jedem Punkt, aber Konvergenzradius ist 1)

$f(x) = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$ holomorph in **C**\{i,-i}

Anmerkung: Konvergenzradius auf **C** bezogen! (darüber auch im reellen erklärt)

D **Bemerkung**: Sei 0<ρ≤r, dann auch $\overline{K_\rho(z_0)} \subset$G

Es gilt $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ für $|z-z_0|<r$

$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$, |z|<ρ

E **Folgerung 1**: Es ist

$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ für 0<ρ≤r

F **Folgerung 2**: Für 0<ρ≤r sei $N := \max_{|\xi|=r} |f(\xi)|$, dann gilt:

$|a_n| \le \frac{N}{\rho^n}$ Cauchysche Koeffizientenabschätzung

G **Folgerung 3**: Ist f holomorph im Gebiet G⊂**C**, so existiert $f^{(n)}$ für jedes n∈**N** und $f^{(n)}$ ist wieder holomorph.

H **Identitätssatz für holomorphe Funktionen**

Sei f holomorph im Gebiet G⊂**C**.
Es existiere eine Folge (z_k) aus G mit $\lim_{k \to \infty} z_k = z_0$, $z_0 \in$ G, $z_k \neq z_0$ für k∈**N**, so daß $f(z_k)=0$ für k∈**N**.
Dann gilt f(z)=0 für alle z∈G.

I **Bemerkung 1**: Sei f im Gebiet G holomorph, $f \neq 0$.

Dann liegen die Nullstellen von f isoliert, d.h. sie haben im Gebiet G keinen Häufungspunkt.

($f(z^*)=0$, dann gibt es ρ>0 mit $f(z) \neq 0$ in $K_\rho(z^*) \setminus \{z^*\}$)

J **Bemerkung 2**: Sind f und g im Gebiet G holomorph, gilt

$f(z_k)=g(z_k)$, k∈**N**

für eine Folge $(z_k) \subset G$ mit $\lim_{k\to\infty} z_k = z_0$, $z_k \neq z_0$, $k \in \mathbf{N}$ und $z_0 \in G$, dann folgt

$f(z)=g(z)$ für alle $z \in G$.

K **Beispiel**: $f(z) := \sin \frac{1}{z}$ holomorph in $\mathbf{C}\setminus\{0\}$

$z_k = \frac{1}{k\pi} \to 0 \notin G$, $f(z_k)=0$ für $k \in \mathbf{N}$ Hier: Satz nicht anwendbar,

da $z_0 \in G$ wichtig!

L **Bemerkung 3**: Nur eine Fortsetzung reell analytischer Funktionen als holomorphe Funktionen möglich.

M **Satz von Morera**: Sei f in einem Gebiet $G \subset \mathbf{C}$ stetig und sei $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg (stückweise stetig) γ, dann hat f in G eine Stammfunktion und ist daher analytisch in G.

N **Bemerkung**: Die Aussage bleibt richtig, falls $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für alle (achsenparallele) geschlossenen Polygonzüge (Jordankurven).

O **Definition**: Eine in **C** holomorphe Funktion heißt ganze Funktion.

P **Beispiele**: e^z, cos z, sin z, Polynome

Q **Satz von Lionville**: Jede beschränkte, ganze Funktion ist konstant (auf **C**).

R **Fundamentalsatz der Algebra**: Jedes Polynom vom Grade $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle in **C**.

S **Satz**: Sei f analytisch im Gebiet $G \subset \mathbf{C}$, $\exists\, x : f(x) \neq 0$. Sei $z_0 \in G$, $f(z_0) = 0$. Dann existiert genau ein $k \in \mathbf{N}$ mit der Eigenschaft

$f(z) = (z - z_0)^k f_k(z)$, wobei f_k analytisch in G ist und $f_k(z_0) \neq 0$ ist.

Warnung: Dies geht nur für $k \in \mathbf{N}$, nicht für $k \in \mathbf{Q}$, wie z. B. ½ ... .

T **Anwendung**: Jedes Polynom zerfällt läßt sich aufspalten in

$$p(z) = C \cdot \prod_{k=1}^{j} \left(z - z_k\right)^{l_k}.$$

U **Definition**: Sei f analytisch in G und sei $k \in \mathbf{N}$. Dann gilt:

(i) $z_0 \in G$ heißt Nullstelle der Ordnung k von f $\Leftrightarrow$ für $z \in G$ gilt:
$f(z) = (z - z_0)^k f_k(z)$, wobei f_k analytisch in G ist und $f_k(z_0= \neq 0$.

(ii) Sei $c \in \mathbf{C}$, $z_0 \in G$ heißt c – Stelle der Ordnung k $\Leftrightarrow$ z_0 ist Nullstelle der Ordnung k von f – c.
Kürzer spricht man von einer k – fachen Nullstelle oder einer k – fachen c – Stelle.

V **Beispiele**: 1. $z_0 = 0$ ist 2 – fache 1 Stelle von cos.
2. Alle c – Stellen von e^z sind einfach!

W **Bemerkung**: $f(z) = z^{1/2}$ hat keine Nullstelle der Ordnung ½.

2.6. Isolierte Singularitäten

A **Definition**: z_0 heißt isolierte Singularität von f, wenn es ein $r > 0$ gibt, so daß f in $K_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ holomorph ist (d.h. mindestens in einer Kreisscheibe)

Klassifizierung

B **1. Fall**: Sei f beschränkt in $K_\rho(z_0) \setminus \{z_0\}$ für ein ρ, $0 < \rho \leq r$.

C **Beispiel**: $\frac{\sin z}{z}$ beschränkt in $K_1(0) \setminus \{0\}$.

D **Definition**: Sei z_0 isolierte Singularität von f – z_0 heißt hebbare Singularität von f, wenn es ein $\rho > 0$ gibt, sp daß f in $K_\rho(z_0) \setminus \{z_0\}$ beschränkt ist.

E **Riemannscher Hebbarkeitssatz**: z_0 ist hebbare Singularität von f

$\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)\,(z - z_0) = 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ existiert

$\Leftrightarrow$ es gibt $c \in$ **C**, so daß f in $K_\rho(z_0)$ analytisch ist, falls $f(z_0) = c$ gesetzt wird.

F **Beispiel**

G **Definition**: Sei z_0 eine isolierte Singularität von f. Dann heißt z_0 Polstelle (auch außerwesentliche Singularität) von f, wenn $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$ ist - im Sinne der chordalen Metrik.

Ist z_0 weder Polstelle noch hebbare Singularität, so heißt z_0 wesentliche Singularität.

H **Definition**: Sei $k\in$ **N**.

Die isolierte Singularität z_0 heißt Polstelle der Ordnung k von $f \Leftrightarrow z_0$ ist hebbare Singularität und k-fache Nullstelle von $\frac{1}{f}$.

I **Satz**: z_0 ist k-fache Polstelle von $f \Leftrightarrow f$ hat eindeutig bestimmte Darstellung

$$f(z) = \frac{f_k(z)}{(z-z_0)^k} = \frac{A_k}{(z-z_0)^k} + \frac{A_{k-1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_1}{z-z_0} + \varphi(z) \qquad z\in K_\delta(z_0)\setminus\{z_0\}$$

(δ hinreichend klein)

wobei f_k und φ holomorph in $K_\delta(z_0)$ sind und $f_k(z_0)=A_k\neq 0$ ist.

J **Beispiel**

K **Satz von Casorati-Weierstraß**

Sei f in $K_r(z_0)\setminus\{z_0\}$ holomorph und sei z_0 eine wesentliche Singularität von f. Dann gilt

$$\overline{f(K_\rho(z_0)-\{z_0\})} = \mathbf{C} \qquad \forall\ \rho: 0<\rho\leq r$$

$(= \hat{\mathbf{C}}$ in chordaler Metrik)

wesentliche Singularität $\Rightarrow$ jeder Punkt wird um z_0 angenommen

L **Definition:** Eine Funktion heißt meromorph im Gebiet G $\subset$ **C**, wenn sie dort bis auf Pole holomorph ist.

M **Bemerkung:** Eine meromorphe Funktion kann in G höchstens abzählbar viele Pole haben. Sie liegen isoliert.

N **Beispiele:**

a) $\frac{1}{e^z-1}$ ist in **C** meromorph, Pol 1. Ordnung.

b) $r(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ rationale Funktionen sind meromorph in **C**, (P, Q Polynome, Q $\neq$ **0**)

c) $\cot^2 z = \frac{\cos^2 z}{\sin^2 z}$ meromorph in **C**, zweifache Postelle in $z_k = k\pi$.

g meromorph in G, $g\neq 0$, dann ist $\frac{1}{g}$ meromorph in G.

O **Bemerkung**: Seien f,g analytisch im Gebiet G$\subset$**C**, $g\neq 0$,

dann $\frac{f}{g}$ ist meromorph in G.

f,g meromorph $\Rightarrow$ f+g, $f\cdot$g meromorph

Die in G meromorphen Funktionen bilden einen Körper.

(Nullelement: 0, Einselement: 1)

$K_R:=\{ z \in$ **C** $\mid |z| > R\}$ (R > 0) [in chordaler Metrik: punktierte Umgebung des Nord pols]

P **Definition**

a) f: $K_R \cup \{\infty\} \to \mathbf{C}$ heißt holomorph in $K_R \cup \{\infty\}$, wenn g mit

$$g(z) := f\left(\frac{1}{z}\right) \text{holomorph in } K_{\frac{1}{R}}(0) \text{ ist.}$$

b) Sei nun f holomoph in K_R. Dann heißt ∞ isolierte Singularität von f. Sei wieder $g(z) := f\left(\frac{1}{z}\right)$, $z \in K_{\frac{1}{R}}(0)\setminus\{0\}$. Genauer heißt jetzt ∞ hebbare Singularität, bzw. Poststelle k – ter Ordnung, bzw. wesentl. Singularität von f $\Leftrightarrow$ $z_0 = 0$ ist hebbare Sing., bzw. Polstelle k – ter Ordnung, bw. westentl. Singularität von g.

c) f heißt meromorph im Gebiet $G \subseteq \hat{\mathbf{C}}$, wenn f dort bis auf Pole holomorph ist.

Q **Beispiele**

a) $f(z) = e^{1/z}$ ist holom. in $K_R \cup \{\infty\}$, denn $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = e^z$ ist holomorph in $K_{\frac{1}{R}}(0)$. f ist damit auch holomorph in $\hat{\mathbf{C}}\setminus\{0\}$.

b) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^3}$ (3 - fache Polstelle in z = 0)

R **Satz**: Ist f holomorph in K_R, dann gilt

a) f ist in ∞ holomorph fortsetzbar $\Leftrightarrow$ $f(\infty) := \lim\limits_{z\to\infty} f(z) \in \mathbf{C}$.

$\Leftrightarrow$ f ist in K_δ beschränkt ($\delta \in \mathbf{R}$)

b) f hat in ∞ einen Pol k – ter Ordnung $\Leftrightarrow$ $f(z) = z^k f_k(z) = A_k z^k + \ldots + A_1 z + \varphi(z)$, wobei f_k und φ holomorph in $K_R \cup \{\infty\}$ sind und $f_k(\infty) = A_k \neq 0$ ist.

c) f hat in ∞ eine wesentliche Singularität $\Leftrightarrow$ $\overline{f(K_\delta)} = \mathbf{C}$ $\forall\ \delta > R$.

S **Beispiele**

1) $f(z) = e^z$, f ganze Funktion, wesentliche Singularität in ∞.

2) $r(z) = z^{m-n} \cdot \left(\dfrac{a_m + \ldots + a_0 z^{-m}}{b_n + \ldots + b_0 z^{-n}}\right)$

m > n: Polstelle

$n \leq m$: hebbare Singularität

Rationale Funktionen sind meromorph in $\hat{\mathbf{C}}$.

T **Satz**: Die in $\hat{\mathbf{C}}$ meromorphen Funktionen sind genau die rationalen Funktionen.

2.7. Windungszahl und Cauchy – Integralfromel

A **Satz**: Sei γ ein geschlossener, stückweise stetig diffbarer Weg. Sei $z \notin |\gamma|$, dann ist $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{ds}{s-z}$ eine ganze Zahl.

B **Definition**: Sei γ ein geschlossener Weg aus **C**, sei $z \notin |\gamma|$.
Dann heißt

$$n(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{ds}{s-z} \text{ Windungszahl von } \gamma \text{ bzgl. z.}$$

C **Bemerkung**: Windungszahl gibt an, „wie oft sich γ um z windet“

D **Definition**: $|\gamma|$ ist kompakt, also $|\gamma|\subset K_r(0)$ für ein r>0 (r hinreichend groß)

Diejenige Komponente von **C**$\backslash|\gamma|$, die **C**$\backslash\overline{K_r(0)}$ enthält, heißt <u>unbeschränkte Komponente</u> von **C**$\backslash|\gamma|$ oder <u>Außengebiet</u> von γ.

(analog: $\hat{\mathbf{C}}\backslash|\gamma|$ - die Komponente, die $\propto$ enthält)

(Begriff: Innengebiet macht keinen Sinn!)

E **Satz**: Es gilt

1) $n(\gamma_-,z)=-n(\gamma,z)$
2) $n(\gamma,z)=0$, falls $|\gamma|\subset K_r(z_0)$ und $|z-z_0|\geq r$ ist
3) $n(\gamma,z)$ ist konstant in jeder Komponente von **C**$\backslash|\gamma|$, insbesondere ist $n(\gamma,z)\equiv 0$ im Außengebiet von γ.

F **Bemerkung**: $n(\gamma,\propto):=0$ (stetige Ergänzung)

G **Beispiel**

H **Cauchysche Integralsatz**

Sei f holomorph im Sterngebiet $G\subset\mathbf{C}$ und sei γ ein geschlossener Weg in G. Dann gilt für $z\in G\backslash|\gamma|$

$$n(\gamma,z)\cdot f(z)=\tfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma \tfrac{f(s)}{s-z}\,ds\,.$$

(Koinzidenz: früher Kreis, also $n(\gamma,z)=1$)

2.8. Argumentprinzip und Maximumprinzip

A **Satz**: Sei f analytisch in $K_r(z_0)$, $f\neq$const, seien z_μ ($\mu=1,...$) die verschiedenen Nullstellen der Ordnung k_μ in $K_r(z_0)$.

Sei γ ein geschlossener Weg in $K_r(z_0)$, $z_\mu\notin|\gamma|$ und sei $T=f\circ\gamma$.

Dann gilt

$$n(T,0)=\tfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma \tfrac{f'(s)}{f(z)}\,dz=\sum_{\mu=1}^{\infty}k_\mu n(\gamma,z_\mu)$$

B **Bemerkung**: Die Summe enthält nur endlich viele von 0 verschiedene Summanden.

„Argumentprinzip“ Unexakt

$$\tfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma \tfrac{f'(s)}{f(z)}\,dz=\tfrac{1}{2\pi}\int_\gamma \underbrace{d\arg f(z)}_{\frac{d}{dz}\arg f(z)}\,dz$$

C **Beispiel**: $f(z)=z^2\left(z-\frac{7}{4}\right)\left(z+\frac{5}{2}\right)$, $K_3(0)$

$\gamma_2(t)=2e^{4\pi it}(t^2-t+1)$, $0\leq t\leq 1$

$z_1=0$: $k_1=2$

$z_2=\frac{7}{4}$: $k_2=1$

$z_3=-\frac{5}{2}$: $k_3=1$

D **Folgerung 1**: (Vorrauss. s. o.) Sei $a\in\mathbf{C}$, seien s_μ die a – Stellen der Ordnung k_μ in $K_r(z_0)$, $s_\mu\notin|\gamma|$, so gilt entsprechend:

$$n(f\circ\gamma,0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)-a}dz=\sum_{\mu=1}^{\infty}k_\mu n(\gamma,s_\mu)$$

E **Folgerung 2**: Sei f analytisch im Gebiet $G\subset\mathbf{C}$ und sei $K_\delta(z_0)\subset G$. Sei N_a die Gesamtzahl der a – Stellen in $K_\delta(z_0)$, wobei jede a – Stelle so oft gezählt wird, wie ihre Ordnung angibt. Sei γ: $[0,2\pi]\to\mathbf{C}$, $\gamma(t)=z_0+\rho e^{it}$ und sei $a \notin |f \circ \gamma|$, dann gilt

$$n(f\circ\gamma, a) = N_a.$$

F **Folgerung 3**: Alle Werte in derselben Zusammenhangskomponente werden gleich oft angenommen.

G **Satz über lokale Wertannahme**: (f nicht konst.)

Sei f analytisch im Gebiet $G \subset \mathbf{C}$, $z_0 \in G$ sei eine w_0 – Stelle der Ordnung n. Dann gibt es ein r > 0 mit $\overline{K_r(z_0)} \subset G$, so daß $f(z) \neq w_0$ und $f'(z) \neq 0$ in $\overline{K_r(z_0)} \setminus \{z_0\}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < r$ existiert ein $\delta > 0$, so daß gilt: Jeder Wert $a \in K_\delta(w_0) \setminus \{w_0\}$ wird in $K_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ an genau n verschiedenen Stellen angenommen.

H **Definition**: Sei $G \subset \hat{\mathbb{C}}$ ein Gebiet, f heißt in G schlicht, (oder konform), falls in G meromorph und injektiv ist.

I **Folgerung 1**: Ist f analytisch in G und $f'(z_0) \neq 0$ für $z_0 \in G$, so gibt es ein $\delta > 0$, so daß f in $K_\delta(z_0)$ schlicht ist.

J **Satz über Gebietstreue**: Sei $G \subset \mathbf{C}$ ein Gebiet, sei f nicht konstant, f analytisch in G, dann ist f(G) ein Gebiet, d.h. offene Abb.

K **Satz**: Ist f analytisch und schlicht im Gebiet $G \subset \mathbf{C}$, so gilt $f'(z) \neq 0$ für $z \in G$. Die Umkehrfunktion f^{-1} ist analytisch im Gebiet f(G) und es gilt

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}, \ \forall\, w \in f(G).$$

f ist also Homöomorphismus und f, f^{-1} sind konform.

Maximumsprinzip

L **Satz**: Sei $f \neq$const, f analytisch im Gebiet $G \subset \mathbf{C}$, dann nimmt $|f|$ in G kein Maximum an.

oder: Nimmt $|f|$ in G Maximum an, so ist f eine konstante Abbildung.

M **Bemerkung**: $f \neq$const. $|f|$ nimmt auch kein lokales Maximum an.

N **Folgerung**: Sei f analytisch im beschränkten Gebiet G und sei f stetig in $\overline{G}$.

Dann gilt für alle $z \in G$: $\quad |f(z)| \leq \max_{s \in \partial G} |f(s)|$

Steht für ein $z_0 \in G$ ein Gleichheitszeichen, so ist $f \equiv$const.

O **Folgerung**: Ist $f \neq$const, dann gilt für alle $z \in G$

$$|f(z)| < \max_{s \in \partial G} |f(s)|$$

P **Schwarzsches Lemma**

Sei f analytisch in $D = K_1(0)$, sei $f(0)=0$ und sei $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in D$.

Dann gilt:

(i) $|f(z)| \leq |z|$ für $z \in D$

(ii) $|f'(0)| \leq 1$

Gilt dabei in (i) für ein $z_0 \in D \setminus \{0\}$: $|f(z_0)| = |z|$ oder in (ii) $|f'(0)| = 1$, so folgt

$$f(z) = e^{i\alpha} z \quad (\alpha \in \mathbf{R}) \quad \forall z \in D.$$

Q **Folgerung**: Sei f analytisch in $K_R(z_0)$, sei $f(z_0)=0$ und sei $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in K_R(z_0)$. Dann gilt für $z \in K_R(z_0)$:

(i) $|f(z)| \leq \frac{M}{R} |z - z_0|$

(ii) $|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}$

Wobei wieder das Gleichheitszeichen nur eintreten kann, falls

$$f(z) = \frac{M}{R}(z - z_0) e^{i\alpha} \quad (\alpha \in \mathbf{R}) \quad \text{für } z \in K_R(z_0) \text{ ist.}$$

III. Allgemeiner Cauchyscher Integralsatz und Folgerungen

3.1. Der allgemeine Cauchysche Integralsatz

A **Definition**

a) $G\subset\hat{\mathbf{C}}$ ein Gebiet.
Dann heißt G <u>einfach zusammenhängend</u>, wenn $\hat{\mathbf{C}}\setminus G$ zusammenhängend ist.

b) Sei $G\subset\mathbf{C}$ ein Gebiet und sei γ ein geschlossener Weg aus G.
Dann heißt γ <u>nullhomolog bzgl. G</u>, wenn $n(\gamma,z)=0$ für alle $z\in\mathbf{C}\setminus G$.

B **Beispiele**

a) $K_r(z_0)$
Sei γ geschlossener Weg in $K_r(z_0)$, dann γ nullhomolog bzgl. $G=K_r(z_0)$

b) $G=\mathbf{C}\setminus\{0\}$
$\hat{\mathbf{C}}\setminus G=\{0\}\cup\{\infty\}$ <u>nicht</u> einfach zusammenhängend

c) $G=\{ z\in\mathbf{C} \mid \frac{1}{2}<|z|<2 \}$ nicht einfach zusammenhängend
$\gamma(t)=e^{it}$, $0\le t\le 2\pi$, γ aus G
$n(\gamma,0)=1$

C **Satz**: Sei G ein Gebiet aus **C**.
G ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn jeder geschlossene Weg aus G nullhomolog bzgl. G ist.

D **Cauchy'sche Integralformel**
Sei G Gebiet aus **C**, sei γ bzgl. G nullhomologer Weg, sei f holomorph in G, dann gilt für $z\in G\setminus|\gamma|$:

$$n(\gamma, z)\cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(s)}{s-z}\,ds\,.$$

E **Cauchy'scher Integralsatz**
Mit denselben Voraussetzungen wie in D gilt

$$\int_\gamma f(s)ds = 0$$

F **Folgerung**: Ist G einfach zusammenhängend, γ ein geschl. Weg aus G, f analytisch in G, dann ist

$$\int_\gamma f(s)ds = 0\,.$$

G **Warnung**: G = einfach zusammenhängend nötig !!!

H **Folgerung 1**: Es gilt zu F:
G einfach zusammenhängend $\Leftrightarrow$ $\int_\gamma f(s)\,ds=0$ für alle geschlossenen Wege γ
und alle in G analytischen Funktionen f.

I **Folgerung 2**: Sei $G\subset\mathbf{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, dann hat jede in G analytische Funktion in G eine Stammfunktion.

J **Folgerung 3**: Sei G ein einfachzusammenhängendes Gebiet aus **C**.
Sei u harmonisch in G, dann gibt es eine in G zu u konjugiert harmonische Funktion.

Bemerkung: $\log|z|$ ist harmonisch in $\mathbf{C}\setminus\{0\}=G$.

K **Satz**: Sei $G\subset\mathbf{C}$ einfach zusammenhängend, sei f analytisch in G und $f(z)\neq 0$ für $z\in G$.
Dann existiert eine in G analytische Funktion g mit

$$e^{g(z)}=f(z) \quad , \quad g'(z)=\frac{f'(z)}{f(z)} \qquad , z\in G$$

Bemerkung

Schreibweise: $\log f := g$ (Nicht als Komposition)

Nicht eindeutig bestimmt: Sei $g_k = g + 2\pi i k$ $(k \in \mathbf{Z})$

Eindeutigkeit durch Festlegung eines Funktionswertes.

$$e^{w_0} = e^{g(z_0)} = f(z_0)$$

L **Folgerung**: Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet aus $\mathbf{C}\setminus\{0\}$, dann gibt es eine in G analytische Funktion log mit

$$e^{\log z} = z \quad , \quad \tfrac{d}{dz}\log z = \tfrac{1}{z} \qquad \text{für alle } z \in G$$

M **Bemerkung**: Ist $1 \in G$, kann $\log(1)=0$ setzen, damit $\log(z)$ eindeutig bestimmt
(Ebene jetzt anders geschlitzt - über eine Funktion)

N **Bemerkung**: $z^a := e^{a \log z}$

3.2. Laurententwicklung

A **Satz über Laurententwicklung**

Sei f analytisch in $G = \{ z \in \mathbf{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2 \}$ $(0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty)$

Dann gilt für $z \in G$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s - z_0| = \rho} \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}} \, ds \qquad (r_1 < \rho < r_2) \qquad (n \in \mathbf{Z})$$

andere Schreibweise

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \underline{\text{Laurent-Reihe}}$$

Anmerkung

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{Konvergenzradius von } f_1 \text{ ist mindestens } r_2$$

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} \qquad \text{konvergent für } |z - z_0| > r_1$$

B **Bemerkung**: Ist f analytisch in $K_R := \{z \in \mathbf{C} \mid R < |z| < \infty\}$ dann gilt für $z \in K_R$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n .$$

Man würde es auffassen, als „Laurent – Entwicklung um ∞“.

C **Definition**: Unter dem Hauptteil einer Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, die für $0 < |z - z_0| < r < \infty$ konvergiert, versteht man die Teilreihe

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

Unter dem Haupteil einer Laurent-Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, die für $|z| > R$ konvergiert, versteht man die Teilreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$.

(Statt $|z| > R$ geht auch $R < |z| < \infty$)

D **Satz**: Sei $z_0 \in \mathbf{C}$ eine isolierte Singularität von f. Dann gibt es ein $r > 0$, so daß

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{in } \{0 < |z - z_0| < r\} \text{ gilt.}$$

Dann ist

(i) z_0 ist hebbare Singularität ⇔ der Hauptteil der Laurentreihe verschwindet identisch.

(ii) z_0 ist Polstelle ⇔ der Hauptteil enthält nur endlich viele nicht identisch verschwindende Summanden.

(iii) z_0 ist wesentliche Singularität ⇔ der Hauptteil enthält unendlich viele nicht identisch verschwindende Summanden.

E **Folgerung**: Ist f analytisch in $\{|z| > 0\}$ (d.h. ∞ ist isolierte Singularität) dann gilt für $z_0 = \infty$ auch (i), (ii), (iii) aus D.

3.3. Residuensatz und Anwendungen

A **Definition**: Ist z_0 eine isolierte Singulariät von f ($z_0 \in \mathbf{C}$) und ist

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{für } z \in K_1(z_0) \setminus \{z_0\}$$

dann heißt

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{|s-z_0|=\delta \\ \delta<r}} f(s)ds$$

das Residuum von f an der Stelle z_0.

f habe in z_0 einen höchstens einfach Pol:

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

B **Residuensatz**: Sei $G \subset \mathbf{C}$ ein Gebiet und sei f analytisch in G bis auf wesentliche Singularitäten oder Polstellen $z_1, z_2, \ldots$ (isol. Singularitäten uninteressant, denn $a_1 = 0$). Sei γ eine nullhomologe Kurve bzgl. G, $z_k \notin |\gamma|$, $k \in \mathbf{N}$. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_n n(\gamma, z_k) \cdot \operatorname*{Res}_{z_k} f$$

(nur endliche viele $n(\gamma, z_0) \neq 0$).

C **Residuenberechnung für Polstellen**

Pol höchstens k-ter Ordnung

$$F(z) := (z-z_0)^k \cdot f(z) \qquad \text{analytisch in } K_r(z_0)$$

$$a_{-1} = \frac{F^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!} = \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(\frac{(z-z_0)^k \cdot f(z)}{(k-1)!} \right)$$

D **Beispiel**

a) Seien p,q Polynome, $q(x) \neq 0$ für $x \in \mathbf{R}$ und sei $\operatorname{grad}(q) - \operatorname{grad}(p) \geq 2$

$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx$, $F(z) := \frac{p(z)}{q(z)}$, seien $z_1, \ldots, z_l$ die Polstellen von F in der <u>oberen Halbebene H</u> (endlich viele Polstellen, da grad<∞)

$$\Rightarrow \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{l} \operatorname*{Res}_{z_j} F$$

b) Seien p,q Polynome, $q(x) \neq 0$ für $x \in \mathbf{R}$ und sei $\operatorname{grad}(q) - \operatorname{grad}(p) \geq 1$,

$$F(z) := \frac{p(z)}{q(z)} e^{i\lambda z}$$

$$\Rightarrow\ I=\int_{-\infty}^{\infty}\tfrac{p(x)}{q(x)}e^{i\lambda z}\ dx=\int_{-\infty}^{\infty}\tfrac{p(x)}{q(x)}\cos\lambda x\ dx+i\int_{-\infty}^{\infty}\tfrac{p(x)}{q(x)}\sin\lambda x\ dx=2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z_k>0}\operatorname*{Res}_{z_k}F$$

3.4. Das Argumentprinzip für meromorphe Funktionen

A **Satz**: Sei f meromorph im Gebiet $G\subset\mathbf{C}$.

Seien z_k die Nullstellen der Ordnung n_k, ξ_l die Polstellen der Ordnung m_l von f in G. Wenn γ ein bzgl. G nullhomologer Weg ist, auf dem weder Nullstellen noch Pole von f liegen, so gilt

$$n(f\circ\gamma,0)=\tfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma\tfrac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\sum_k n_k\cdot n(\gamma,z_k)-\sum_l m_l\cdot n(\gamma,\xi_l)$$

B **Beispiel**

C **Satz**: Sei f meromorph und h holomorph im Gebiet $G\subset\mathbf{C}$.

Seien z_k die Nullstellen der Ordnung n_k, ξ_l die Polstellen der Ordnung m_l von f in G. Wenn γ ein bzgl. G nullhomologer Weg ist, auf dem weder Nullstellen noch Pole von f liegen, so gilt

$$\tfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(z)\tfrac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\sum_k n_k\cdot h(z_k)\cdot n(\gamma,z_k)-\sum_l m_l\cdot h(\xi_l)\cdot n(\gamma,\xi_l)$$

Spezialfall: γ: Jordankurve

D **Folgerung**: Sei f meromorph und h holomorph im Gebiet $G\subset\mathbf{C}$.

Sei γ eine positiv orientierte Jordankurve mit Innengebiet G_0, $G_0\cup|\gamma|\subset G$.
Seien z_k die Nullstellen der Ordnung n_k, ξ_l die Polstellen der Ordnung m_l von f in G_0. Keine Nullstelle, kein Pol von f liegt auf $|\gamma|$.
Dann gilt:

$$\tfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(z)\tfrac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\sum_k n_k\cdot h(z_k)-\sum_l m_l\cdot h(\xi_l)$$

E **Spezialfall**: $n(f\circ\gamma,0)=\tfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma\tfrac{f'(z)}{f(z)}\,dz=N-P$ (d.h.: $h\equiv 1$)

wo bei N die Gesamtzahl der Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt) von f in G_0, P die Gesamtzahl der Polstellen (mit Vielfachheit gezählt) von f in G_0 ist.

F **Satz**: Sei f analytisch und schlicht im Gebiet $G\subseteq\mathbf{C}$, sei γ eine positiv orientierte Jordankurve mit Innengebiet G_0, $G_0\cup|\gamma|\subset G$. Dann gilt für $w\in f(G_0)$:

$$f^{-1}(w)=\tfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma z\,\tfrac{f'(z)}{f(z)-w}\,dz$$

G **Satz von Roché**: Sei $G\subset\mathbf{C}$ ein Gebiet, γ eine Jordankurve mit Innengebiet G_0, $G_0\cup|\gamma|\subset G$. Die Funktionen f,g seien beide analytisch in G und es gelte

$|g(z)|<|f(z)|$ für $z\in|\gamma|$

Dann haben f und f+g gleichviele Nullstellen in G_0 (unter Berücksichtigung der Vielfachheit).

H **Fundamentalsatz der Algebra** (Beweis über Roché)

p sei ein Polynom vom Grade n. Dann hat p n Nullstellen.

I **Beispiel**

Harmonische Funktionen

J **Satz**: Sei u harmonisch in $K_R(z_0)$ und stetig auf $\overline{K_R(z_0)}$.

Dann gilt für alle $w\in K_R(z_0)$:

$$u(w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-|w-z_0|^2}{|\mathrm{Re}^{it}-(w-z_0)|^2}\underbrace{u(z_0+\mathrm{Re}^{it})}_{Funktion\ am\ Rande}\,dt$$

$$K(\mathrm{Re}^{it},w,z_0) = \frac{1}{2\pi}\frac{R^2-|w-z_0|^2}{|\mathrm{Re}^{it}-(w-z_0)|^2} \qquad \text{Poisson-Kern}$$

mit $K(s,w,z_0) = \frac{1}{2\pi}\frac{|s|^2-|w-z_0|^2}{|s-(w-z_0)|^2} > 0$ für $|w-z_0|<|s|$

K **Anwendung**

$$\int_0^{2\pi} K(\mathrm{Re}^{it},w,z_0)\,dt = 1 \qquad \text{(mit } u\equiv 1\text{)}$$

L **Schwarzsche Formel**: Ist f analytisch in $K_R(0)$ und ist u = Re f stetig in $\overline{K_R(z_0)}$, dann gibt es eine reelle Konstante C, so daß für $z \in K_R(0)$ gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|s|=R}\frac{s+z}{s-z}u(s)\frac{ds}{s} + iC$$

M **Folgerung**: u in $\overline{K_R(z_0)}$ stetig in $K_R(0)$ harmonisch, dann

$$v(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Im}\frac{R\cdot e^{it}+z}{R\cdot e^{it}-z}\cdot u(R\cdot e^{it})dt$$

konjugiert harmonisch zu u.

Das Dirichlet Problem für den Kreis

Dirichlet Problem: Sei G ein Gebiet, U: $\partial_{\hat{C}}G \to \mathbf{R}$ eine vorgegebene stetige Funktion. Gitbt es eine in G harmonische, in $\overline{G}$ stetige Funktion u mit u(s) = U(s), für $s \in \partial_{\hat{C}}G$?

N **Satz**: Ist U: $\partial K_R(0) \to \mathbf{R}$ stetig, dann ist $P_U := \int_0^{2\pi} K(R\cdot e^{it},z,0)\cdot U(R\cdot e^{it})dt$

Lösung des Dirichlet – Problems für den Kreis.

Identitätssatz, Mittelwerteigenschaft und Maximumsprinzip

O **Identitätssatz für harmonische Funktionen**: Ist u harmonisch im Gebiet $G \subset \mathbf{C}$, ist H eine offene Teilmenge von G und u(z) = 0 für alle $z \in H$, dann folgt

u(z) = 0 für alle $z \in G$.

P **Mittelwerteigenschaft (MWE)**

u harmonisch in G, $\overline{K_r(z_0)} \subset G$, dann gibt es ρ > r und auch noch $K_\rho(z_0) \subset G$

u (z) = Re f(z), $z \in K_\rho(z_0)$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|s-z_0|}\frac{f(s)}{s-z_0}ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})dt$$

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0+\mathrm{Re}^{it})dt \quad \text{MWE} \quad \text{für } R \le r$$

Q **Satz**: Sei $G \subset \mathbf{C}$ ein Gebiet und u: $G \to \mathbf{R}$ stetig. Zu jedem $z_0 \in G$ existiere ein R > 0, so daß für alle r < R gilt:

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + Re^{it})dt \quad \text{(Mittelwertungleichung MWU).}$$

Wenn die Funktion in G ihr Maximum annimmt, so ist u eine konstante Funktion.

R **Folgerung**: Sei u nicht konstant im Gebiet $G \subset \mathbf{C}$, u harmonisch in G, dann nimmt un in G kein Maximum und kein Minimum an.

S **Satz**: Sei $G \subset \mathbf{C}$ ein Gebiet, $u: G \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion. Zu jedem $z_0 \in G$ existiere ein $R > 0$, so daß für jedes $r < R$ gilt:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + Re^{it})dt\,.$$

Dann ist u harmonisch in G.

T **Bemerkung**: G beschränktes Gebiet. Sei u stetig in $\overline{G}$ harmonisch in G => u nimmt Maximum und Minimum am Rande an.

U **Satz**: Sei G ein Gebiet, u harmonisch in G, $\mu > 0$. Gilt dann für jede gegen einen Punkt aus $\partial_{\hat{C}} G$ konvergente Folge ,(z_n), $z_n \in G$

$$\overline{\lim_n}\; u(z_n) \leq \mu$$

dann gilt $u(z) < \mu$ für alle $z \in G$ oder $u(z) = \mu$.

Index zu Funktionentheorie I