

# Numerik II

Kurzskriptum nach einer Vorlesung von  
*Professor Dr. H. M. Möller*

Universität Dortmund – Wintersemester 1998/99

Letzte Änderung: 1. Dezember 2001

Dieses Kurzschrift ist aus meiner persönlichen Mitschrift der Vorlesung

## Numerik II

bei *Professor Dr. H. M. Möller* im Wintersemester 1998/99 entstanden. Ich habe versucht alles richtig wiederzugeben, kann allerdings keine Garantie darauf geben. Es ist deshalb wahrscheinlich, daß dieses Skriptum Fehler enthält.

Dieses Skriptum darf nur umsonst oder zum Selbstkostenpreis weitergegeben werden. Ich untersage jede kommerzielle Nutzung durch Dritte. Dieses Skriptum ist weder eine offizielle noch eine von *Professor Möller* autorisierte Version. Deshalb ist bei Fehlern zuerst davon auszugehen, daß diese von mir stammen.

Ingo Manfraß

# Inhaltsverzeichnis zu Numerik II

<b><u>§ 7 INTERPOLATION</u></b> .....	<b>3</b>
7.1 ALGEBRAISCHE INTERPOLATION: .....	3
7.2 DIE NEWTON – DARSTELLUNG .....	4
7.3 DER INTERPOLATIONS-FEHLER .....	5
7.4 RATIONALE INTERPOLATION .....	6
7.5. TRIGONOMETRISCHE IP:.....	6
7.6 SPLINE – INTERPOLATION:.....	7
<b><u>§ 8 APPROXIMATION</u></b> .....	<b>9</b>
8.1. DAS ALLGEMEINE APPROXIMATIONSPROBLEM .....	9
8.2. TSCHEBYSCHJEFF-APPROXIMATION .....	10
8.3 APPROXIMATION IN UNITÄREN RÄUMEN: .....	10
<b><u>§ 9 GRAPHIK UND CAD</u></b> .....	<b>13</b>
9.1. BERNSTEIN-POLYNOME.....	13
9.2. BÉZIER – KURVEN: .....	14
9.3. B-SPLINE-KURVEN .....	15
<b><u>§ 10 NUMERISCHE INTEGRATION</u></b> .....	<b>17</b>
10.1 EINFÜHRUNG: .....	17
10.2 INTERPOLATORISCHE QUADRATURFORMEL (QF) .....	18
10.3. GAUß-QUADRATURFORMEL .....	19
10.4. DAS ROMBERG-VERFAHREN .....	20
<b><u>11. NUMERISCHE LÖSUNG VON ANFANGSWERTAUFGABEN:</u></b> .....	<b>22</b>
11.1 EINFÜHRUNG: .....	22
11.2. DAS EULERSCHE POLYGONZUGVERFAHREN.....	23
11. 3 EINSCHRITTVERFAHREN: .....	23
11.4. DER TAYLORABGLEICH: .....	24
11.5 RUNGE – KUTTA – VERFAHREN DER ORDNUNG 2.....	24
11.6. ALLGEMEINE RUNGE-KUTTA-VERFAHREN: .....	24
11.7. KONVERGENZ VON EINSCHRITTVERFAHREN .....	26
11.8 EINSCHRITTVERFAHREN IN DER PRAXIS: .....	28
<b><u>12. LINEARE MEHRSCHRITTVERFAHREN:</u></b> .....	<b>28</b>
12.1 GRUNDLAGEN .....	28
12.2. KONSISTENZ VON MSV .....	29
12.3 STABILITÄT UND KONVERGENZ:.....	30

„EINSCHUBSVORLESUNG“ VON RALF TENBERG .....	31
REGULÄRE VORLESUNG BEI PROF. MÖLLER .....	31
<b>12.4. LOKALER UND GLOBALER DISKRETISIERUNGSFEHLER .....</b>	<b>32</b>
<b>12.5. DIE VERFAHREN VON ADAMS - BASHFORTH UND ADAMS - MOULTON: .....</b>	<b>32</b>
ADAMS-BASHFORTH (AB) .....	32
ADAMS-MOULTON (AM) .....	33
BACKWARD-DIFFERENCE-FORMULA (BDF) .....	34
<b>12.6 STEIFHEIT UND STABILITÄT: .....</b>	<b>34</b>
<b><u>13. RANDWERTPROBLEME .....</u></b>	<b><u>36</u></b>
<b>13.1 LÖSBARKEIT VON RWP .....</b>	<b>36</b>
EIGENWERTPROBLEME FÜR DGLs .....	36
RANDWERTPROBLEME MIT FREIEM RAND .....	37
<b>13.2 DAS EINFACHE SCHIEßVERFAHREN: .....</b>	<b>37</b>
<b>13.3 EIN EXISTENZ- UND EINDEUTIGKEITSSATZ FÜR RWP .....</b>	<b>38</b>

## § 7 Interpolation

### 7.1 Algebraische Interpolation:

#### Das IP-Problem:

Gegeben:  $x_0, \dots, x_n \in \mathbf{R}$  paarweise verschieden  
 $y_0, \dots, y_n \in \mathbf{R}$  beliebig  
 Gesucht:  $p \in \mathcal{Q}_n$ , d.h. Polynom vom Grad  $\leq n$ , mit  
 $p(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n$   
 $x_j$  heißt Stützstelle, IP-Punkt  
 $y_i$  heißt Stützwert, Datum

$p$  heißt das IP – Polynom (Satz 7.1.1) zu den Stützstellen  $x_0, \dots, x_n$  und Daten  $y_0, \dots, y_n$ .

#### Satz 7.1.1: (Existenz und Eindeutigkeitsatz)

Das IP- Problem hat genau eine Lösung

#### Definition (Haarscher Raum, Tschebyscheff Menge)

Sei  $U$  lin. Teilraum von  $C[a,b]$  mit  $\dim U = n$ . Hat jedes  $u \in U, u \neq 0$  in  $[a,b]$  höchstens  $n - 1$  verschiedene Nullstellen, dann heißt  $U$  ein Haarscher Raum und wenn  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  eine Basis von  $U$  ist, dann heißt  $B$  eine Tschebyscheff Menge.

#### Satz 7.1.2: Sei $U$ linearer Teilraum von $C[a,b]$ , $\dim U = n$ . Dann sind äquivalent

- (i)  $U$  ist Haarscher Raum
- (ii) zu paarweise verschiedenen  $x_1, \dots, x_n \in [a,b]$  und bel.  $y_1, \dots, y_n \in \mathbf{R}$  ex. genau ein  $u \in U: u(x_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, n$
- (iii) Für je  $n$  paarweise verschiedene  $x_1, \dots, x_n \in [a,b]$  und jede Basis  $\{b_1, \dots, b_n\}$

$$\text{gilt: } \det \left( b_i(x_j) \right)_{i,j=1}^n \neq 0.$$

#### Beispiele (für Tschebyscheff – Systeme)

- (i)  $\{1, x, \dots, x^n\}$
- (ii)  $\{1, e^x, e^{2x}, \dots, e^{nx}\}$
- (iii)  $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx\}$  auf jeden halboffenen Intervall der Länge  $2\pi$ .

#### Definition (Lagrange – Grundprobleme)

$n + 1$  paarweise verschiedene Punkte  $x_0, \dots, x_n$   
 Die Polynome

$$l_k(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \quad k = 0, \dots, n$$

heißen „die zu  $x_0, \dots, x_n$  gehörenden Lagrange – Grundpolynom“.

**Bemerkung:**  $l_k \in \mathcal{Q}_n, l_k(x_i) = \delta_{ik}$

**Bemerkung:**  $w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$  Knotenpolynom

$$w'(x) = \sum_{k=0}^n (x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)$$

$$\Rightarrow w'(x_i) = (x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1}) \dots (x_i - x_n)$$

$$\Rightarrow l_k(x) = \frac{w(x)}{x - x_k} \cdot \frac{1}{w'(x_k)}$$

**Satz 7.1.3.:** (Lagrange IP – Formel)

Die eindeutige Lösung des IP-Problems lässt sich schreiben in der Form

$$p = \sum_{l=0}^n y_l l_k$$

**Satz 7.14.:** Zu fest gewählten  $x_0, \dots, x_n \in [s, b]$ ,  $x_i \neq x_j$  für  $i \neq j$  sei  $I_n: \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathcal{Q}_n$ ,

$I_n(y_0, \dots, y_n) = \sum_{k=0}^n y_k l_k$ . Dann ist  $I_n$  ein beschränkter und linearer Operator mit

$$\begin{aligned} \|I_n\|_\infty &:= \sup_{y \neq 0} \frac{\|I_n(y)\|_\infty}{\|y\|_\infty} < \infty \\ &= \sup_{\|y\|_\infty=1} \|I_n(y)\|_\infty < \infty. \end{aligned}$$

Es gilt, wenn  $L_n$  die sogenannte Lebesgue-Funktion ist, also

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n |l_k(x)|, \quad \|I_n\|_\infty = \|L_n\|_\infty.$$

Je größer die Lebesgue-Konstante

$$\Lambda_n := \|L_n\|_\infty$$

desto schlechter die Stützstellenwahl.

**7.2 Die Newton – Darstellung**

$$U_0(x) = 1$$

$$U_1(x) = x - x_0$$

$$U_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$$

...

$$U_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Sei  $M = (U_k(x_l))_{k,l=0}^n$ , d.h.  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & x_n - x_0 & \dots & U_n(x_n) \end{pmatrix}$ .

Das IP – Polynom hat damit die Darstellung

$$P_n = \sum_{k=0}^n a_k U_k \quad \text{mit} \quad M \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (\text{Lösung von oben her}).$$

**Definition** (Dividierte Differenzen)

Ist  $P_j$  das IP-Polynom zu  $x_0, \dots, x_j$  und  $y_0, \dots, y_j$ . Dann heißt der Koeffizient der höchsten Potenz  $x^j$  von  $P_j$  eine dividierte Differenz  $j$ -ter Ordnung, kurz  $[y_0, \dots, y_j]$ .

Ist  $f$  eine Funktion mit  $f(x_j) = y_j$ , dann  $f[x_0, \dots, x_j] = [f(x_0), \dots, f(x_j)]$ .

**Satz 7.2.1:**  $x_0, \dots, x_j \in \mathbf{R}$  paarweise verschieden,  $y_0, \dots, y_j \in \mathbf{R}$ . Dann gilt:

i)  $[y_0, \dots, y_j] = \sum_{k=0}^j y_k \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^j \frac{1}{x_k - x_l}$

ii)  $[y_0, \dots, y_j]$  ist invariant unter Permutationen von  $y_0, \dots, y_j$  (und entspr. Perm. von  $x_0, \dots, x_j$ )

iii) Es gilt rekursiv (nach I)

$$[y_i] := y_i \quad i = 0, \dots, j$$

$$[y_i, \dots, y_{i+k}] = \frac{[y_{i+1}, \dots, y_{i+k}] - [y_i, \dots, y_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

$[y_0, \dots, y_j] = 0$  falls ein Polynom  $p \in \mathcal{O}_{j-1}$  ex. mit  $p(x_j) = y_j$ .

**Satz 7.2.2:** Das Interpolationspolynom  $p_n$  zu den Stützstellen  $x_0, \dots, x_n$  (paarweise verschieden) und Daten  $y_0, \dots, y_n$  hat die Darstellung

$$p_n(x) = [y_0] + [y_0, y_1](x-x_0) + [y_0, y_1, y_2](x-x_0)(x-x_1) + \dots + [y_0, \dots, y_n](x-x_0) \dots (x-x_{n-1})$$

$x_0$	$y_0 = [y_0]$	$[y_0, y_1]$	$[y_0, y_1, y_2]$		
$x_1$	$y_1 = [y_1]$	$[y_1, y_2]$		$\dots$	
$x_2$	$y_2 = [y_2]$				$[y_0, \dots, y_n]$
			$[y_{n-2}, y_{n-1}, y_n]$	$\dots$	
		$[y_{n-1}, y_n]$			
$x_n$	$y_n = [y_n]$				

Auswertung der Newton-Form mit Hornerähnlichem Verfahren

$$p_n(x) = [y_0] + (x-x_0)([y_0, y_1] + (x-x_1)([y_0, y_1, y_2] + \dots + [y_0, \dots, y_n]) \dots)$$

Spezialfall: äquidistante Stützstellen

$$x_k = x_0 + k \cdot h, \quad h > 0 \text{ Schrittweite}, \quad k = 0, \dots, n$$

Vorwärts genommene Differenzen

$$\Delta^0 y_i := y_i, \quad \Delta^k y_i := \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$$

$$\Rightarrow [y_i, \dots, y_{i+k}] = \frac{1}{h^k \cdot k!} \Delta^k y_i$$

Formel von Gregory Newton

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \Delta^k y_0 \binom{t}{k}, \quad t = \frac{x-x_0}{h} \quad \text{mit} \quad \binom{t}{k} = \frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-k+1)}{k!}$$

### 7.3 Der Interpolations-Fehler

$$f \in C[a, b], \quad f(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n, \quad a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$$

$p_n$  sei das Interpolations-Polynom an  $f$  in  $x_0, \dots, x_n$ , mit  $y_0, \dots, y_n$ .

**Frage:** Wie verhält sich  $r_n(x) = f(x) - p_n(x)$  auf  $[a, b]$ ?

**Satz 7.3.1:** (Cauchy-Darstellung des Interpolations-Fehlers)

Sei  $I$  kleinstes Intervall, das  $x$  und  $x_0, \dots, x_n$  enthält.

$f$  sei  $n+1$  mal stetig differenzierbar auf  $I$ .

Dann gilt:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) w_{n+1}(x) \quad \text{mit einem } \xi \in I$$

**Bemerkung:**  $f \in C^{n+1}(I)$ ,  $\|f^{(n+1)}\|_\infty = \max_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|$

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty |w_{n+1}(x)| \quad \forall x \in I$$

Durch geeignete Stützstellenwahl  $|w_{n+1}(x)|$  klein

$$\|w_{n+1}\|_\infty \text{ minimal} \quad \text{für } I = [-1, 1]$$

$$\text{wenn } w_{n+1} = 2^{-n} T_{n+1}$$

**Satz 7.3.2:** (Restglied nach Newton)

Es gilt

$$f(x) - p_n(x) = f[x_0, \dots, x_n, x] w_{n+1}(x)$$

**Korollar 7.3.3:**  $f \in C^n[x_0, x_n] \Rightarrow f[x_0, \dots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)$  für ein  $\xi \in [x_0, x_n]$

$$p_n = \sum_{k=0}^n y_k l_k, \quad \tilde{p}_n = \sum_{k=0}^n \tilde{y}_k l_k \quad \text{mit} \quad y_k = \tilde{y}_k + \varepsilon_k, \quad |\varepsilon_k| \leq \varepsilon \quad k=0, \dots, n$$

$$\text{Fehler: } \eta = \sum_{k=0}^n \varepsilon_k l_k = p_n - \tilde{p}_n$$

**Bemerkung:**  $|L_k(x)| \geq |\sum_{k=0}^n l_k(x)| = 1$

**Satz 7.3.4:** Gilt  $y_k = \tilde{y}_k + \varepsilon_k, |\varepsilon_k| \leq \varepsilon, k=0, \dots, n$ , dann gilt

$$\|\eta\|_{\infty} = \max_{a \leq x \leq b} |\eta(x)| \leq \varepsilon \cdot \Lambda_n$$

### 7.4 Rationale Interpolation

$$S(l, m) = \{ r = \frac{p}{q} \mid p \in Q_l, q \in Q_m, q \neq 0 \}$$

Anzahl der Parameter:  $\underbrace{l+m}_n + 1$

**Problem:** Finde zu  $x_0, \dots, x_n \in \mathbf{R}$  paarweise verschieden und  $y_0, \dots, y_n \in \mathbf{R}$  ein  $r \in S(l, m)$  mit  $n=l+m$  und  $r(x_k) = y_k, k=0, \dots, n$ .

**Satz 7.4.1:** Das lineare Problem hat immer eine Lösung. Sind  $(p_1, q_1)$  und  $(p_2, q_2)$  Lösungen, dann gilt  $p_1 q_2 = p_2 q_1$ .

**Beispiel:**

**Satz 7.4.2.:** Erfüllt  $(p, q) \in Q_l \times Q_m$  das lineare IP – Problem  $p(x_k) - y_k q(x_k) = 0, k = 0$  und sind

$p$  und  $q$  teilerfremd (also  $q(x_k) \neq 0$  !), dann löst  $r = \frac{p}{q} \in S(l, m)$  das

Originalproblem.

**Definition** (inverse Differenzenquotienten)

$x_0, \dots, x_n$  paarweise verschieden, zugehörigen Daten  $y_k = f(x_k), k = 0, \dots, n$ .

$$\Delta^0(x_i)f := y_i \quad i = 0, \dots, n$$

$$\Delta^k(x_0, \dots, x_{k-1}, x_i)f := \frac{x_i - x_{k-1}}{\Delta^{k-1}(x_0, \dots, x_{k-2}, x_i)f - \Delta^{k-1}(x_0, \dots, x_{k-1})f} \quad j = k, k+1, \dots, n$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

**Bemerkung:** Der inverse Differenzenquotient hängt von der Reihenfolge der  $x_i$  ab!

**Satz 7.4.3.:** Existieren die inversen Differenzenquotienten  $a_k = \Delta^k(x_0, \dots, x_k)f$  für  $k = 0, \dots, n$ , dann stellt der Kettenbruch

$$r(x) = a_0 + \frac{x - x_0}{|a_1|} + \dots + \frac{x - x_{n-1}}{|a_n|} \text{ eine rationale Interpolierende mit } r(x_k) = y_k$$

dar.

### 7.5. Trigonometrische IP:

**Definition: (Trigonometrische Polynome)**

$$c_v \in \mathbf{C}, v = 0, \dots, n, c_n \neq 0$$

$$\tau_n(t) := \sum_{v=0}^n c_v \exp(ivt) \quad , t \in \mathbf{R}$$

komplexes trigonometrisches Polynom vom Grad  $n$ .

$$a_v, b_v \in \mathbf{R}, (a_n, b_n) \neq (0, 0)$$

$\tau_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^n (a_v \cos(vt) + b_v \sin(vt))$  reelles trigonometrisches Polynom vom Grad  $n$ .

**Bemerkung:**  $\tau_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^n \frac{a_v}{2} (e^{ivt} + e^{-ivt}) + \sum_{v=1}^n \frac{b_v}{2i} (e^{ivt} - e^{-ivt})$

**Satz 7.5.1:** Das reelle trigonometrische Polynom

$\tau_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^n (a_v \cos(vt) + b_v \sin(vt))$  vom Grad  $n$  ist umkehrbar eindeutig einem komplexen trigonometrischen Polynom  $\tau_{2n}$  zugeordnet mit

$$T_{2n}(t) = \sum_{v=0}^{2n} c_{v-n} e^{ivt}$$

$$a_0 = 2c_0, a_v = c_v + c_{-v}, b_v = i(c_v - c_{-v})$$

$$T_{2n}(t) = e^{int} \tau_n(t) \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

**Lemma 7.5.2:** Sei  $N \in \mathbf{N}$  und  $\omega_N = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right)$ .

$$\text{Dann ist } \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (\omega_N^{\mu\nu})^j = \delta_{\mu\nu} \quad \text{für } 0 \leq \mu, \nu \leq N-1.$$

**Satz 7.5.3 :** Sei  $N \in \mathbf{N}$ ,  $x_\mu = \frac{2\pi\mu}{N}$ ,  $\mu = 0, N = 1$ .  $f_\mu \in \mathbf{C}$ ,  $\mu = 0, \dots, N - 1$ . Das zu diesen Stützstellen und Daten gehörende komplexe trigonometrische IP-Polynome  $\tau_{N-1}$  hat

$$\text{die Gestalt } \tau_{N-1}(t) = \sum_{v=0}^{N-1} c_v \exp(ivt) \quad \text{mit } c_v = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega_N^{-vj} \quad v = 0, \dots, N - 1$$

**Bemerkung:**

{Ingo}

**Satz 7.5.4.** Gegeben:  $x_\mu = \frac{2\pi\mu}{N}$ ,  $\mu = 0, N = 1$ .  $f_\mu \in \mathbf{C}$ ,  $\mu = 0, \dots, N - 1$ . Für  $N = 2n$  oder  $N =$

$$2n+1 \text{ sei } a_v := \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \cos(vx_j), \quad b_v := \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \sin(vx_j)$$

Sei ferner

$$\tau_{N-1}(t) = \begin{cases} \frac{a_0}{2} + \sum_{v=0}^n [a_v \cos(vt) + b_v \sin(vt)] & N = 2n + 1 \\ \frac{a_0}{2} + \sum_{v=0}^{n-1} [a_v \cos(vt) + b_v \sin(vt)] + \frac{a_n}{2} \cos(nt) & N = 2n \end{cases}$$

Dann gilt

$$\tau_{N-1}(x_\mu) = f_\mu, \quad \mu=0, 1, \dots, N-1$$

### 7.6 Spline – Interpolation:

Algebraische Interpolation an Intervallrändern oft schlecht => Abhilfe mit Splines

**Definition(Spline)**

Sei  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  Zerlegung von  $[a,b]$ . Die Elemente von

$$S_m(x_0, \dots, x_n) := \{s \in C^{m-1}[a,b] \mid s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in Q_n\}$$

heißen Spline – Funktionen oder Splines vom Grad  $m$  (auf der Zerlegung  $a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b$ ).

**Beispiel:** linearer und kubischer Spline

**Definition (truncated-Power-Function):**  $a \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{N}_0$

Dann heißt

$$u_{a,m}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

mit

$$u_{a,m}(x) = \begin{cases} (x-a)^m & \text{für } x \geq a \\ 0 & \text{für } x < a \end{cases} =: (x-a)_+^m$$

truncated-Power-Funktion

Oft kurz  $(x-a)_+^m$  als  $u_{am}$

**Satz 7.6.1.:** Durch  $M := \{1, t, \dots, t^m, (t-x_1)_+^m, \dots, (t-x_{n-1})_+^m\}$  ist eine Basis von  $S_m(x_0, \dots, x_n)$  gegeben.

Es gilt insbesondere

$$\dim S_m(x_0, \dots, x_n) = m+n$$

**Definition (B-Splines)**

Für  $i \in \mathbf{Z}$  sei  $x_i \in \mathbf{R}$  mit  $i < j \Rightarrow x_i < x_j$ ,  $-\infty < \dots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots < \infty$

Dann heißt die durch

$$N_{im}(t) := \{x_{i+m} - x_i\} u_{t,m-1}[x_i, \dots, x_{i+m}]$$

definierte Funktion (normalisierter) B-Spline der Ordnung  $m$  zur Knotenfolge

$$\{x_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$$

Nach 7.2(i) gilt

$$N_{im}(t) = (x_{i+m} - x_i) \sum_{v=i}^{i+m} \prod_{\substack{k=i \\ k \neq v}}^{i+m} \frac{1}{x_v - x_k} (x_v - t)_+^{m-1}$$

$N_{im}$  ist also ein Spline!

**Bemerkung**

$$f[x_i, \dots, x_{i+m}] = \frac{1}{x_{i+m} - x_i} \frac{1}{(m-1)!} \int_{\mathbf{R}} f^{(m)}(t) \underbrace{N_{im}(t)}_{\text{Integral kern}} dt$$

**Beispiel:**  $m = 1$   $N_{i1}(t) = \begin{cases} 1, & t \in ]x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

**Satz 7.6.2.:** Für  $m \geq 2$  gilt

$$N_{im}(t) = \frac{t - x_i}{x_{i+m-1} - x_i} N_{i(m-1)}(t) + \frac{x_{i+m} - t}{x_{i+m} - x_{i+1}} N_{i+1,m-1}(t)$$

**Satz 7.6.3.:** Eigenschaften:

Für  $i \in \mathbf{Z}, m \in \mathbf{N}$  gilt:

- i)  $N_{im}(t) = 0$  für  $t \notin ]x_i, x_{i+m}]$
- ii)  $N_{im}(t) > 0$  für  $t \in ]x_i, x_{i+m}]$
- iii)  $\sum_{i \in \mathbf{Z}} N_{im}(t) = 1 \quad \forall t \in \mathbf{R}$

**Lemma (Marsden – Identität):**

Für alle  $m \in \mathbf{N}, s \in \mathbf{R}$  gilt:

$$(t-s)^{m-1} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Psi_{im}(s) N_{im}(t) \quad \text{mit} \quad \Psi_{im}(s) = (x_{i+1} - s) \dots (x_{i+m-1} - s).$$

**Korollar:**  $p \in Q_{m-1}, s \in \mathbf{R} \Rightarrow p = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda_{im}(p) N_{im}$  mit

$$\lambda_{im}(p) = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{m-1-j} \frac{\Psi_{im}^{(m-1-j)}(s)}{(m-1)!} p^{(j)}(s)$$

**Satz 7.6.4.:** Die  $n+m$  B-Splines  $N_{-m,m+1}, N_{-m+1,m+1}, \dots, N_{n-1,m+1}$  sind lokal lin. unabhängig, d.h. in jedem Intervall  $]c, d[ \subset [x_k, x_{k+1}]$ ,  $0 \leq k < n$  sind die B-Splines  $\{N_{i,m+1} \mid -m \leq i \leq m-1, N_{im}]c, d[ \neq 0\}$  sind linear unabhängig.

**Bemerkung:** Auf  $[x_0, x_n]$  sind nur  $N_{-m,m-1}, \dots, N_{n-1,m-1}$  nicht Null.

**Satz 7.6.5:** Die  $n+m$  B-Splines  $N_{-m,m+1}, \dots, N_{n-1,m+1}$  bilden eine Basis von  $S_m(x_0, \dots, x_n)$ .

**IP Problem in  $S_m(x_0, \dots, x_n)$**

Gegeben: paarweise verschiedene Stützstellen  $\xi_1, \dots, \xi_{m+n}$  und Daten  $y_1, \dots, y_{m+n} \in \mathbf{R}$ .

Gesucht:  $s \in S_m(x_0, \dots, x_n)$  mit  $s(\xi_i) = y_i \quad i = 1, \dots, m+n$ .

Lösung mit B-Splines:

Ergänze  $x_0, \dots, x_n$  mit je  $m$  Knoten rechts und links

$$x_{-m} < x_{-m+1} < \dots < x_{-1} < x_0 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots < x_{n+m}.$$

Dann mit Basis aus Satz 7.6.5. arbeiten!

**Satz 7.6.6.:** (Schönberg und Whitney)

Gegeben sei  $x_{-m} < \dots < x_0 < \dots < x_{m+n}$

Zu  $\xi_1 < \dots < \xi_{m+n}$  (und  $y_1, \dots, y_{m+n} \in \mathbf{R}$ ) existiert genau dann ein  $s \in S_m(x_0, \dots, x_n)$

mit  $s(\xi_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, m+n$ ,

wenn  $N_{-m+j,m+1}(\xi_i) \neq 0 \quad 1 \leq j \leq m+n$ .

{ § 8 Approximation, Einschub Ingo }

{ Ingo }

## § 8 Approximation

### 8.1. Das allgemeine Approximationsproblem

Anpassung „gleichmäßig“ in einem Intervall.

Güte der Approximation an  $f$  durch  $p \in U$ :  $\|f-p\|$

**Definition** (beste Approximation, Proximum)

Sei  $U$  ein linearer Unterraum eines normierten Vektorraumes  $V$ .

Ein Element  $h_0 \in U$  heißt beste Approximation oder Proximum an  $f \in V$ , wenn

$$\|f-h_0\| \leq \|f-h\| \quad \forall h \in U$$

$E_n(f) = \inf_{h \in U} \|f-h\|$  heißt Minimalabweichung

**Beispiel:** Sei  $(V, \|\cdot\|) = (C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ .

Dann spricht man von gleichmäßiger Approximation oder Tschebyscheff

Approximation. Häufig ist  $U = Q_n$  (Polynomapproximation)

**Satz 8.11.:** Ist  $\dim U < \infty$ , dann gibt es zu jedem  $f \in V$  eine beste Approximation  $h_0 \in U$ .

**Satz 8.1.2.:** Die Menge der besten Approximation aus  $U$  an  $f \in V$  ist konvex.

## 8.2. Tschebyscheff-Approximation

**Satz 8.2.1.** (Kolmogoroff-Kriterium)

Sei  $U$  linearer Unterraum von  $C[a,b]$ .

$h_0 \in U$  ist genau dann Proximum an  $f \in C[a,b]$ , wenn jedes  $h \in U$  die Ungleichung

$$\min_{t \in E(f-h_0)} \{f(t) - h_0(t)\}h(t) \leq 0$$

erfüllt mit

$$E(f-h_0) = \{t \in [a,b] \mid |f(t)-h_0(t)| = \|f-h_0\|_\infty\}$$

**Satz 8.2.2.** (Eindeutigkeitssatz von Haar)

Sei  $U$  ein Haarscher Unterraum von  $C[a,b]$ .

Dann ist die beste Approximation  $h_0$  an  $f \in C[a,b]$  eindeutig.

**Lemma:** Sei  $U \in C[a,b]$  Haarsch,  $\dim U = n$

Dann existiert zu  $a=x_0 < \dots < x_n = b$  eine Funktion  $h \in U$ , so daß

$$\begin{aligned} h(x) &= 0 && \text{für } x \in \{x_1, \dots, x_{n-1}\} \\ h(x) &\neq 0 && \text{für } x \in [a,b] \setminus \{x_1, \dots, x_{n-1}\} \\ (-1)^v h(x) &> 0 && \text{für } x \in ]x_{v-1}, x_v[ \end{aligned}$$

**Korollar:** Sei  $U \in C[a,b]$  Haarsch,  $\dim U = n$ .

Dann existiert für jedes  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \leq n$  zu vorgegebenen  $a=x_0 < \dots < x_m = b$  eine nicht-triviale Funktion  $h \in U$  mit

$$(-1)^v h(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in [x_{v-1}, x_v]$$

**Definition** (Alternante)

Eine Menge von  $n+1$  Punkten  $a \leq x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b$  heißt Alternante für  $f \in C[a,b]$  und  $h \in U$  mit  $\dim U = n$ , wenn für die Fehlerfunktion  $r = f-h$  gilt

$$\sigma(-1)^v r(x_v) > 0 \quad \text{für } v=1, \dots, n+1, \sigma \in \{-1, 1\} \text{ fest}$$

**Satz 8.2.3.** (Alternantensatz von Tschebyscheff)

$U$  Haarscher Unterraum von  $C[a,b]$ ,  $n = \dim U$ .

$h_0 \in U$  ist genau dann beste Approximation an  $f \in C[a,b]$ , wenn eine Alternante  $a \leq x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b$  existiert, so daß

$$|f(x_v) - h_0(x_v)| = \|f - h_0\|_\infty, \quad v=1, \dots, n+1$$

gilt.

**Beispiel:** Auf  $C[-1,1]$  mit Haarschem Unterraum  $Q_n$  ist  $h_0(x) := x^{n+1} - 2^{-n} T_{n+1}(x)$  beste Approximation an  $x^{n+1}$ .

Konstruktion der Bestapproximation mit Algorithmus von Remez.

**Satz 8.2.4** (de la Vallée – Poussin)

Sei  $U$  ein Haarscher Unterraum von  $C[a,b]$  mit  $\dim U = n$ . Ist  $\dim U = n$ . Ist  $f \in C[a,b]$  und  $h \in U$  und bilden  $x_1, \dots, x_{n+1}$  eine Alternante für  $f - h$ . Dann gilt

$$\min_{v=1}^{n+1} |f(x_v) - h(x_v)| \leq E_U(f) \leq \|f - h\|_\infty$$

## 8.3 Approximation in unitären Räumen:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R} \quad \text{oder} \quad \mathbf{K} = \mathbf{C}$$

**Definition: (unitärer Raum)**

$V$  ein Vektorraum über  $\mathbf{K}$ , Abb.  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V^2 \rightarrow \mathbf{K}$  mit

i)  $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}, u, v \in V$

ii)  $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

iii)  $\langle v, v \rangle > 0$  für  $v \in V \setminus \{0\}$

und heißt Skalarprodukt (inneres Produkt) und  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  heißt unitärer Raum. Für  $\mathbf{R} = \mathbf{R}$  heißt  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  euklidischer Raum.

**Bemerkung:**  $\langle w, \alpha u + \beta v \rangle = \alpha \langle w, u \rangle + \beta \langle w, v \rangle$  Sesquilinearform

**Beispiele** -  $\mathbf{K}^n$  mit  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$

-  $Q_n$  mit  $\langle p, q \rangle := \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$

-  $C[a,b]$  mit  $\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx$

-  $\{z_v\}_{v=1}^\infty, \{w_v\}_{v=1}^\infty$  Folgen mit  $z_v, w_v \in \mathbf{C}$  und  $\sum_{v=1}^n |z_v|^2 < \infty, \sum_{v=1}^n |w_v|^2 < \infty$

$$\langle \{z_v\}, \{w_v\} \rangle := \sum_{v=1}^\infty z_v \overline{w_v}$$

Dieser Raum heißt  $l_2$ .

**Satz 8.3.1 (Cauchy – Schwarze – Ungleichung)**

Sei  $V$  unitär. Dann gilt

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \quad \forall x, y \in V$$

Gleichheit nur im Fall  $\dim \text{span}\{x, y\} \leq 1$

**Satz 8.3.2** Sei  $V$  unitär. Dann ist durch  $\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  eine Norm gegeben.

**Bemerkung:** Normierter Raum, wo Norm durch Skalarprodukt induziert ist, heißt Prae-Hilbertraum. Prae-Hilbertraum ist Hilbertraum, wenn er vollständig in der Norm ist.

-  $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_2)$  vollst., weil endlichdim.

-  $(C[a,b], \|\cdot\|_2)$  nicht vollständig  $L^2[a,b]$  ist Hilbertraum (Äquivalenzklassen)

**Satz 8.2.3:** Sei  $V$  unitär. Dann gilt für alle  $x, y \in V$

i)  $\|x + y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle$  (Satz von Pythagoras)

ii)  $\|x + y\|_2^2 + \|x - y\|_2^2 = 2\|x\|_2^2 + 2\|y\|_2^2$  (Parallelogrammgleichung)

**Definition:** (Orthonormalsystem, Orthogonalsystem)

$x, y$  heißen orthogonal, wenn  $\langle x, y \rangle = 0$  ist.

Eine Familie  $\{x_i\}_{i \in I} \subset V$  heißt Orthogonalsystem (OS), wenn  $i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle = 0$ .

Orthogonalbasis (OB), wenn  $\{x_i\}_{i \in I}$  Basis von  $V$  und OS. ONS, ONB: wie OS

und OB nur normiert auf die Lösung.

**Satz 8.3.4:** (Charakterisierung der besten Approximation)

Sei  $U$  Unterraum von  $V$ ,  $\dim U < \infty$ .  $h_0 \in U$  ist genau dann beste Approximation von  $f$  an  $V$ , wenn  $\langle f - h_0, h \rangle = 0 \quad \forall h \in U$ .

$h_0$  heißt aus orthogonale Projektion von  $f$  auf  $U$ .

**Korollar** (lin. Projektionsoperator)

In unitärem Raum  $V$  existiert bzgl. eines endlichdim. Unterraumes  $U$  zu jedem  $f \in V$  genau eine beste Approximation  $h_0 \in U$ . Die Abbildung  $P: V \rightarrow U$  mit  $P(f) = h_0$  ist ein linearer Projektionsoperator und für die Abweichung  $\|f - P(f)\|_2$  gilt:

$$\|f - P(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|P(f)\|_2^2.$$

**Satz 8.3.5.:** Sei  $\{u_1, \dots, u_n\}$  Basis von  $U$ .

Dann erhält man die Koeffizienten des Proximums an  $f \in V$ ,

$$h_0 = \sum_{v=1}^n a_v u_v$$

als Lösung der Normalgleichungen

$$\sum_{v=1}^n a_v \langle u_v, u_\mu \rangle = \langle f, u_\mu \rangle \quad \mu=1, \dots, n$$

Die sogenannte Gram-Matrix

$$\begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \cdots & \langle u_1, u_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_n, u_1 \rangle & \cdots & \langle u_n, u_n \rangle \end{pmatrix}$$

ist positiv definit.

**Beispiel:**  $V=C[0,1]$ ,  $U=Q_{n-1}$

$$u_v(x) = x^{v-1}, \quad v = 1, \dots, n$$

Gram-Matrix ist hier die Hilbertmatrix

$$\left( \frac{1}{v+\mu-1} \right)_{\mu, v=1}^n \quad (\text{sehr schlecht konditioniert})$$

**Satz 8.3.6.** (Orthonormalisierung von E. Schmidt)

$b_1, \dots, b_n \in V$  linear unabhängig,  $V$  unitär.

Dann bekommt man ein Orthonormalsystem mit

$$\text{span}\{u_1, \dots, u_n\} = \text{span}\{b_1, \dots, b_n\}$$

rekursiv mit

$$u_1 := \frac{b_1}{\|b_1\|}$$

$$u_v := \frac{b_v - \sum_{\mu=1}^{v-1} \langle b_v, u_\mu \rangle u_\mu}{\left\| b_v - \sum_{\mu=1}^{v-1} \langle b_v, u_\mu \rangle u_\mu \right\|}, \quad v=2, \dots, n$$

**Satz 8.3.7.:** Sei  $\{u_1, \dots, u_n\}$  eine Orthonormalbasis von  $U_n \subset V$ .

Dann hat die Minimalabweichung von  $f$  bzgl.  $u_n$  die Gestalt

$$\|f - h_0\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{v=1}^n |\langle f, u_v \rangle|^2$$

$h_0$  Proximum an  $f$  auf  $U_n$ .

**Korollar** (Besselsche Ungleichung)

$\{u_1, \dots, u_n\}$  Orthonormalsystem, Basis von  $U_n \subset V$ .

Dann gilt für jedes  $f \in V$  die Besselsche Ungleichung:

$$\sum_{v=1}^n |\langle f, u_v \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2$$

**Definition** (vollständiges Orthonormalsystem)

Ein Orthonormalsystem  $\{u_v\}_{v=1}^\infty$  heißt vollständig, wenn es zu jedem  $f \in V$ ,  $V$

unitär,  $\{u_v\}_{v=1}^\infty \subset V$ , eine Folge  $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset V$  gibt mit

(i)  $f_n \in \text{span}\{u_1, \dots, u_n\}, \quad n \in \mathbf{N}$

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_2 = 0$

**Satz 8.3.8.:** Sei  $\{u_v\}_{v=1}^\infty$  Orthonormalsystem in unitärem Raum  $V$ .

Dann sind äquivalent

(i)  $\{u_v\}_{v=1}^\infty$  ist vollständig

(ii)  $f = \sum_{v=1}^\infty \langle f, u_v \rangle u_v \quad \forall f \in V$  (Fourier-Entwicklung)

$$(iii) \|f\|_2^2 = \sum_{v=1}^{\infty} |\langle f, u_v \rangle|^2 \quad \forall f \in V \text{ (Parsevalsche Gleichung)}$$

**Beispiel:**  $C_{2\pi}$ : stetigen  $2\pi$ -periodischen Funktionen

Bezüglich  $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t) dt$  ist  $\{u_1, \dots, u_{2n+1}\}$  mit

$$u_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$u_{2v}(x) = \cos(vx), \quad u_{2v+1}(x) = \sin(vx) \quad , v=1, \dots, n$$

ein Orthonormalsystem.

Die beste Approximation  $h_0$  an  $f \in C_{2\pi}$  aus  $U_{2n+1} = \text{span}\{u_1, \dots, u_{2n+1}\}$  ergibt sich zu

$$h_0(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^n \{a_v \cos(vx) + b_v \sin(vx)\}$$

$$\text{mit } a_v = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(vt) dt, \quad b_v = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(vt) dt \quad \text{Fourier-Koeffizienten}$$

## § 9 Graphik und CAD

### 9.1. Bernstein-Polynome

**Definition:** (Bernstein-Polynome)

Die Polynome

$$b_{vn}(t) = \binom{n}{v} t^v (1-t)^{n-v} \quad , v=0, \dots, n \quad , n \in \mathbf{N}_0$$

heißen Bernstein-Polynome des Grades  $n$  bzgl.  $[0,1]$ .

**Formal:**  $b_{vn} \equiv 0$  falls  $v < 0$  oder  $v > n$

**Satz 9.1.1.:** Für  $n \in \mathbf{N}$ ,  $0 \leq v \leq n$  gilt

- (i)  $b_{vn}$  hat  $v$ -fache Nullstelle in 0.
- (ii)  $b_{vn}$  hat  $(n-v)$ -fache Nullstelle in 1.
- (iii)  $b_{vn}(t) > 0$  für  $t \in ]0,1[$  mit genau einem Maximum, und zwar bei  $t = \frac{v}{n}$
- (iv)  $b_{0n}, b_{1n}, \dots, b_{nn}$  bilden Basis von  $Q_n$ .

**Satz 9.1.2.:** Für  $t \in \mathbf{R}$  gilt

- (i)  $\sum_{v=0}^n b_{vn}(t) = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}$
- (ii)  $\sum_{v=0}^n \frac{v}{n} b_{vn}(t) = t \quad \forall n \in \mathbf{N}$
- (iii)  $\sum_{v=0}^n \frac{v^2}{n^2} b_{vn}(t) = \frac{n-1}{n} t^2 + \frac{t}{n} \quad \forall n \in \mathbf{N}$

**Lemma 9.1.3:** Es gilt

$$b'_{vn}(t) = \begin{cases} -n \cdot b_{0,n-1}(t) & v=0 \\ n[b_{v-1,n-1}(t) - b_{v,n-1}(t)] & 1 \leq v \leq n-1 \\ n \cdot b_{n-1,n-1}(t) & v=n \end{cases}$$

**Definition:** (monotoner linearer Operator)

Ein linearer Operator  $L: C(I) \rightarrow C(I)$  heißt monoton, wenn  $\forall f, g \in C(I)$  gilt:

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in I \quad \Rightarrow \quad Lf(x) \leq Lg(x) \quad \forall x \in I$$

**Beispiel:**  $B_n: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$

$$B_n(f)(x) = \sum_{v=0}^n f\left(\frac{v}{n}\right) \cdot b_{vn}(x) \quad \text{Bernstein – Operator}$$

**Bemerkung:** Für den Bernsteinoperator gilt sogar

$f$  monoton  $\Rightarrow B_n f$  monoton (im selben Sinn, d.h.: str. m. st.  $\Rightarrow$  str. m. st.)

$f$  konvex  $\Rightarrow B_n f$  konvex

**Satz 9.1.4.:** (Korovkin)

Sei  $\{L_n\}$  ein Folge monotoner linearer Operatoren, die  $C[a,b]$  in sich abbilden. Sei  $e_k \in C[a,b]$  mit  $e_k(x) = x^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Ist dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_k) - e_k\|_\infty = 0, \quad \text{für } k = 0, 1, 2$$

Dann gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\|_\infty = 0 \quad \forall f \in C[a,b]$$

**Korollar:** Für jedes  $f \in C[0,1]$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - B_n(f)\|_\infty = 0.$$

**Satz 9.1.5:** (Approximationssatz von Weierstraß)

Gegeben sei  $f \in C[a,b]$ . Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $n \in \mathbf{N}$  und ein  $p \in Q_n$  mit  $\|f - p\| < \varepsilon$ .

**Bemerkung:** Sei  $f \in C[0,1]$  in  $a \in [0,1]$  zweimal stetig diffbar. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot [B_n(f)(a) - f(a)] = \frac{a(1-a)}{2} f''(a) \quad (\text{Voronovskaja})$$

## 9.2. Bézier – Kurven:

**Definition: (Bézier – Kurven und – Punkte)**

$\beta_0, \dots, \beta_n \in \mathbf{R}^d$  gegeben. Sei  $p: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^d$  definiert durch

$$p(t) = \sum_{v=0}^n \beta_v b_{vn}(t)$$

$p$  ist eine Kurve im  $\mathbf{R}^d$  (eigentlich der Graph) in Bézier-Darstellung kurz Bézier-Kurve.  $\beta_0, \dots, \beta_n$  heißen Bézier-Punkte oder Kontrollpunkte. Der Streckenzug durch  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$  heißt Bézier-Polynom.

{Christian}

Satz 9.2.1. bis Satz 9.2.4. (ohne!!!)

**Beispiel:**

**Satz 9.2.1:** Für  $t \in [0,1]$  liegt die Bézier – Kurve in der konvexen Hülle seiner Bézier-Punkte,

$$\text{d.h. } p(t) \in \text{conv} \{\beta_0, \dots, \beta_n\} = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i \beta_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1 \right\}.$$

**Satz 9.2.2:** Gegeben  $\beta_0, \dots, \beta_{n+1} \in \mathbf{R}^d$ . Ist  $p_1$  Bézierkurve mit Kontrollpunkten  $\beta_0, \dots, \beta_n$  und  $p_2$  Bézierkurve mit Kontrollpunkten  $\beta_1, \dots, \beta_{n+1}$ . Dann hat die Bézierkurve  $p$  mit Kontrollpunkten  $\beta_0, \dots, \beta_{n+1}$  die Darstellung

$$p(t) = (1-t)p_1(t) + t p_2(t).$$

**Satz 9.2.3:** Für die Bézier-Darstellung eines Polynoms  $p \in Q_n$ ,  $p = \sum_{v=0}^n \beta_v b_{vn}$  gilt die

Differentiationsformel

$$p^{(k)}(t) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{v=0}^{n-k} (\Delta^k \beta_v) \cdot b_{v,(n-k)}(t),$$

wo  $\Delta^k$  vorwärtsgenommene k-te Differenzen:  $\Delta^0 \beta_v = \beta_v$   
 $\Delta^{k+1} \beta_v = \Delta_k \beta_{v+1} - \Delta^k \beta_v$

**Korollar:** Für die Randpunkte gilt insbesondere

$$p^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!} \Delta^k \beta_0$$

$$p^{(k)}(1) = \frac{n!}{(n-k)!} \Delta^k \beta_{n-k}$$

$$\text{und } p(0) = \beta_0$$

$$p(1) = \beta_n$$

$$p'(0) = n(\beta_1 - \beta_0)$$

$$p'(1) = n(\beta_n - \beta_{n-1})$$

$$p''(0) = n(n-1)(\beta_2 - 2\beta_1 + \beta_0)$$

$$p''(1) = n(n-1)(\beta_{n-2} - 2\beta_{n-1} + \beta_n)$$

**Bemerkung:**  $p(t) = \sum_{v=0}^n \beta_v b_{vn}(t) \stackrel{\text{Taylor}}{\underset{\text{um } 0}{=}} \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} \Delta^v \beta_0 \cdot t^v$

**Lemma:** Seien  $\beta_0, \dots, \beta_n$  Bézier-Punkte. Mit

$$\hat{\beta}_v := \frac{v}{n+1} \beta_{v-1} + \left(1 - \frac{v}{n+1}\right) \beta_v \quad v = 0 \text{ (???)}, \dots, n+1$$

$$\text{gilt } \sum_{v=0}^n \beta_v b_{vn} = \sum_{v=0}^{n+1} \hat{\beta}_v b_{v,n+1}$$

**Algorithmus von Casteljau:**

siehe Skript

{Ingo}

**Satz 9.2.4.:** Eine zusammengesetzte Bézier-Kurve s mit

$$s(t) = \begin{cases} \sum_{v=0}^n \beta_v^{(0)} b_{vn}(t) & , \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ \sum_{v=0}^n \beta_v^{(1)} b_{vn}(t-1) & , \text{für } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

ist genau dann in  $C^r[0,2]$ , wenn

$$\Delta^\rho \beta_{n-\rho}^{(0)} = \Delta^\rho \beta_0^{(1)} \quad , \rho=0,1,\dots,r$$

**Speziell:** s stetig  $\Leftrightarrow \beta_n^{(0)} = \beta_0^{(1)}$

$$s \in C^1[0,2] \Leftrightarrow \beta_n^{(0)} = \beta_0^{(1)} = \frac{1}{2}(\beta_{n-1}^{(0)} + \beta_1^{(1)})$$

$$s \in C^2[0,2] \Leftrightarrow s \in C^1[0,2] \text{ und } 2\beta_{n-1}^{(0)} - \beta_{n-2}^{(0)} = 2\beta_1^{(1)} - \beta_2^{(1)}$$

### 9.3. B-Spline-Kurven

**Definition:** Gegeben seien  $n \in \mathbf{N}$  und Knotenfolge  $\{x_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$

$$\dots < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots$$

Mit  $N_{im}$  seien die zugehörigen B-Splines bezeichnet.

Dann heißt

$$s(t) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} d_i N_{im}(t)$$

eine B-Spline-Kurve der Ordnung m (des Grades m-1)

Die Koeffizienten  $d_i \in \mathbf{R}^d$  heißen Kontrollpunkte oder de Boor-Punkte.

**Satz 9.3.1.:** Verändert man in einer B-Spline-Kurve den Kontrollpunkt  $d_k$ , so ändert sich die Kurve nur im Bild von  $]x_k, x_{k+m}[$ .

**Bemerkung:** Die Kurve  $s$  liegt in der konvexen Hülle ihrer Kontrollpunkte.

**Algorithmus von de Boor-Cox**

Gegeben:  $s = \sum_{i \in \mathbf{Z}} d_i N_{im}$ ,  $t \in [x_j, x_{j+1}[$

Gesucht:  $s(t)$

$$d_i^{(0)} := d_i, \quad i=j-m+1, \dots, j$$

Für  $k=1, \dots, m-1$

$$d_i^{(k)} := w_{i, m-k+1} d_i^{(k-1)} + (1 - w_{i, m-k+1}) d_{i-1}^{(k-1)}, \quad i=j-m+k+1, \dots, j$$

Ende:  $d_j^{(m-1)} = s(t)$

**Anmerkung:**  $d_i^{(k)}$  ist eine Konvexkombination

**Lemma 9.3.2.:** Für die Ableitung von  $N_{im}$  gilt

$$N'_{im}(t) = (m-1) \left\{ \frac{1}{x_{i+m-1} - x_i} N_{i, m-1}(t) - \frac{1}{x_{i+m} - x_{i+1}} N_{i+1, m-1}(t) \right\}$$

**Satz 9.3.3.:**  $s = \sum_{i \in \mathbf{Z}} d_i N_{im} \Rightarrow s' = \sum_{i \in \mathbf{Z}} \frac{d_i - d_{i-1}}{x_{i+m-1} - x_i} N_{i, m-1}$

**Lemma 9.3.4.:** Sei  $m \in \mathbf{N}$  und  $\{x_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$  Knotenfolge.

Gegeben sei ein  $\hat{x} \in ]x_j, x_{j+1}[$ .

Verfeinerte Knotenfolge

$$\hat{x}_j = \begin{cases} x_i & \text{für } i \leq j \\ \hat{x} & \text{für } i = j+1 \\ x_{i-1} & \text{für } i > j+1 \end{cases}$$

$N_{im}$  sei B-Spline zu  $\{x_i\}$ ,  $\hat{N}_{im}$  sei B-Spline zu  $\{\hat{x}_i\}$ .

Zu gegebener Folge  $\{d_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$  definiere  $\{\hat{d}_i\}$  durch

$$\hat{d}_i = \begin{cases} d_i & \text{für } i < j - m + 1 \\ \frac{\hat{x} - x_i}{x_{i+m-1} - x_i} d_i + \frac{x_{i+m-1} - \hat{x}}{x_{i+m-1} - x_i} d_{i-1} & \text{für } j - m + 2 \leq i \leq j \\ d_{i-1} & \text{für } i \geq j + 1 \end{cases}$$

{Christian}

Satz 9.3.5. bis §10

{Ingo}

**Allgemeiner mit dem „Oslo-Algorithmus“**

von Cohen, Lyche und Riesenfeld

**Satz 9.3.5:**  $m \in \mathbf{N}$ ,  $\{x_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$  Knotenfolge mit  $x_i < x_{i+1} \forall i \in \mathbf{Z}$ .  $N_{im}$  B-Spline.

$\{\hat{x}_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$  sei Verfeinerung, d.h. Knotenfolge mit  $\hat{x}_i < \hat{x}_{i+1} \forall i \in \mathbf{Z}$  und  $\{x_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$

Teilfolge von  $\{\hat{x}_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$ .  $\hat{N}_{im}$  zugeh. B-Splines. Man setzt:

$$\alpha_{ij}^{(1)} := \begin{cases} 1 & x_i < \hat{x}_j < x_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und  $\alpha_{ij}^{(k)} := \frac{\hat{x}_{j+k-1} - x_i}{x_{i+k-1} - x_i} \alpha_{ij}^{(k-1)} + \frac{x_{i+k} - \hat{x}_{j+k-1}}{x_{i+k} - x_{i+1}} \alpha_{i+1,j}^{(k-1)}$ .

Dann gilt:  $N_{im} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_{ij}^{(m)} \hat{N}_{jm}$

Somit für  $s = \sum_i d_i N_{im} \Rightarrow s = \sum_i \hat{d}_j \hat{N}_{jm}$  mit  $\hat{d}_j = \sum_i \alpha_{ij}^{(m)} d_i$

**Spezialfall:**  $x_i = i, i \in \mathbb{Z}$   
siehe Skript

**Lemma 9.3.6:**  $N_m$  sei der B-Spline der Ordnung  $m$  zu den Knoten  $0, 1, 2, \dots, m$ . Dann gilt

$$N_m(t) = \sum_{j=0}^m \alpha_j^{(m)} N_m(2t - j) \quad \text{mit} \quad \alpha_j^{(m)} = \frac{1}{2^{m-1}} \binom{m}{j}, j = 0, 1, \dots, m.$$

**Beispiel:**

## § 10 Numerische Integration

### 10.1 Einführung:

**Definition:** Sei  $I: C[a,b] \rightarrow \mathbf{R}, f \rightarrow \int_a^b f(x)dx = I(f)$  ein Integral. Wir nennen  $Q: C[a,b] \rightarrow \mathbf{R}$

mit  $Q(f) = \sum_{v=0}^n a_v f(x_v)$  eine Quadraturformel des (Exaktheits)grades  $d$  für  $I$ , wenn

$$I(f) = Q(f) \quad \forall f \in Q_d.$$

Genauer  $\text{grad} = \text{maximaler Exaktheitsgrad} - x_0, \dots, x_n$ : Knoten (Stützstellen),  $a_0, \dots, a_n$  heißen Gewichte,  $R = I - Q$  heißt Quadraturfehler.

**Beispiele:** Mittelpunktsregel:  $Q_M(f) = (b - a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$  (Exaktheitsgrad 1)

Trapezregel:  $Q_T(f) = (b - a) \left\{ \frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b) \right\}$  (Exaktheitsgrad 1)

**Zerlegung:**  $a = s_0 < s_1 < \dots < s_n = b$ .

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{v=1}^n \int_{s_{v-1}}^{s_v} f(x)dx = \sum_{v=1}^n I_v(f)$$

$Q_v$  sei Quadraturformel für  $I_v$ , dann heißt  $Q(f) = \sum_{v=1}^n Q_v(f)$  summierte

Quadraturformel.

Summierte Quadraturformel konvergieren im allgemeinen bei Verfeinerung der Zerlegung gegen den Integralwert.

**Beispiel:**  $Q_M^{(s)}(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{v=0}^n f\left(a + \frac{2v-1}{2} \cdot \frac{b-a}{n}\right)$  summierte Mittelpunktsregel

$$Q_T^{(s)}(f) = \frac{b-a}{n} \left\{ \frac{1}{2} f(a) + \sum_{v=1}^n f\left(a + v \frac{b-a}{n}\right) + \frac{1}{2} f(b) \right\}$$

**Satz 10.1.1:** (Peano – Fehlerdarstellung)

Sei  $Q$  Quadraturformel des Grades  $d \int_a^b f(x)dx = Q(f) + R(f)$  mit

$$Q(f) = \sum_{v=0}^n a_v f(x_v).$$

Dann hat der Fehler R für  $0 \leq m \leq d$  die Darstellung  $R(f) = \int_a^b f^{(m+1)}(t) G_m(t) dt$ ,

$$\forall f \in C^{m+1}[a,b], \text{ wobei } G_m(t) := \frac{1}{m!} R(u_{t,m}) \quad \forall t \in [a, b] \text{ und } u_{t,m}(x) = (x-t)_+^m.$$

**Korollar 10.1.2:** Ist  $f \in C^{m+1}[a, b]$ , dann gilt:  $R(f) \leq \int_a^b |G_m(t)| dt \cdot \max_{x \in [a,b]} |f^{(m+1)}(x)|$ . Wechselt  $G_d$

nicht das Vorzeichen, auf  $[a, b]$ , dann existiert ein  $s \in [a, b]$  mit

$$R(f) = \frac{1}{(d+1)!} f^{(d+1)}(s) \cdot R(x^{d+1}).$$

### 10.2 Interpolatorische Quadraturformel (QF)

**Definition:** Eine  $(n+1)$ -punktige Quadraturformel zu  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^n a_k f(x_k) + R(f)$$

heißt interpolatorisch, wenn  $R(p)=0 \quad \forall p \in \mathcal{Q}_n$ . (also: Exaktheitsgrad = n)

**Satz 10.2.1.:** Zu beliebig vorgegebenen Knoten  $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$  existiert genau eine interpolatorische Quadraturformel

$$Q(f) = \sum_{k=0}^n a_k f(x_k)$$

Ihre Gewichte erhält man durch Integration der Lagrange-Grundpolynome

$$a_k = \int_a^b l_k(x) dx \quad \text{mit } l_k(x) = \prod_{\substack{v=0 \\ k \neq v}}^n \frac{x-x_v}{x_k-x_v}$$

**Bemerkung:** Ist  $p$  das Interpolationspolynom an  $f$ , dann gilt

$$Q(f) = \int_a^b p(x) dx$$

Jetzt spezielle Knotenwahl:

$$x_k = a + k \cdot h, \quad k=0, \dots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

→ interpolatorische Quadraturformel heißt Newton-Cotes-Formel.

Die Gewichte sind hier:

$$a_{kn} = h \underbrace{\frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \int_0^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-k} dt}_{=\alpha_{kn}} = h \cdot \alpha_{kn} \quad (\alpha_{kn} \text{ ist unabhängig von der Intervallbreite } h)$$

**Beispiel:**  $n=1$ :  $Q(f) = \frac{h}{2} f(a) + \frac{h}{2} f(b)$  Trapezregel

Fehlerdarstellung (z.B. mit Newton-Darstellung des Interpolationsfehlers)

$$R(f) = I(f-p) \quad (p \text{ interpoliert } f)$$

$$f \in C^2[a,b] \Rightarrow R(f) = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b-a)^3 \quad \text{für ein } \xi \in [a,b] \quad (\text{Stützstellen: } a,b; n=1)$$

$$n=2: \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} \{f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\} + R(f)$$

Simpson-Regel / Keplersche Faßregel  
(Exaktheitsgrad = 3)

$$f \in C^4[a,b] \Rightarrow R(f) = -\frac{1}{90} f^{(4)}(\xi) h^5 \quad \text{für ein } \xi \in [a,b] \quad (h = \frac{b-a}{2})$$

Newton-Cotes-Formeln für  $n > 2$  praktisch uninteressant!

(negative Gewichte  $\Rightarrow$  Konvergenz nicht mehr gesichert)

Besser: Summierte Newton-Cotes-Formeln

### 10.3. Gauß-Quadraturformel

Hier Integral  $I(f) = \int_a^b f(x)\omega(x) dx$  mit  $\omega(x) > 0$  für  $x \in ]a,b[$

Intervall darf auch unendliche Länge haben, es muß nur gelten:

$$0 \leq I(p^2) < \infty \quad \forall p \in Q$$

$(f,g) := I(f \cdot g)$  Skalarprodukt

**Satz 10.3.1.:** Der Exaktheitsgrad einer Quadraturformel

$$Q(f) = \sum_{k=0}^n a_k f(x_k)$$

beträgt höchstens  $2n+1$ .

**Satz 10.3.2.:** Eine interpolatorische Quadraturformel

$$Q(f) = \sum_{k=0}^n a_k f(x_k)$$

hat genau dann den Exaktheitsgrad  $2n+1$ , wenn gilt

$$\int_a^b p(x)\omega_{n+1}(x)\omega(x) dx = 0 \quad \forall p \in Q_n$$

also:  $(p, \omega_{n+1}) = 0 \quad \forall p \in Q_n$

**Definition:** Ein Polynom  $p \in Q_{n+1} \setminus Q_n$  heißt Orthogonalpolynom des Grades  $n+1$  (zur Gewichtsfunktion  $\omega$  und zum Intervall  $[a,b]$ ), wenn gilt

$$(q,p) = 0 \quad \forall q \in Q_n$$

(analog bei  $[a, \infty[$ , ...)

Existenz von Orthogonalpolynomen:

o.B.d.A  $\omega(x) = x^{n+1} + \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad (\omega, q) = 0 \Leftrightarrow I(x^{n+1+i}) + \sum_{k=0}^n a_k I(x^{k+i}) = 0, i = 0, \dots, n$

mit Gram-Matrix  $G = (I(x^{k+i}))_{i,k=0}^n$ ,  $G$  positiv definit

**Folge:** Es gibt genau ein (bis auf konstante Vielfache eindeutiges) orthogonales Polynom des Grades  $n + 1$  (zu Gewichtsfunktion  $w$  und Intervall  $[a, b]$ ). Insbesondere sind die Nullstellen „des“ orthogonalen Polynoms eindeutig.

**Satz 10.3.3:** Ist  $\omega \in Q_{n+1}$  ein orthogonales Polynom des Grades  $n + 1$ , dann sind seine Nullstellen alle einfach und im Intervallinneren.

**Satz 10.3.4:** Es gibt eindeutig bestimmte Knoten  $x_0, \dots, x_n \in ]a, b[$ , so daß die QF

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx = \sum_{v=0}^n a_v f(x_v) + R(f)$$

den Exaktheitsgrad  $2n + 1$  hat.

Die Knoten  $x_0, \dots, x_n$  sind Nullstellen des Orth.- Polynoms vom Grad  $n + 1$  bzgl.  $w$  und  $[a, b]$  und die Gewichte erfüllen

$$a_v = \int_a^b l_v^2(x) w(x) dx > 0, v = 0, \dots, n.$$

**Satz 10.3.5.:** Der Peano – Kern  $G_m$  einer  $n + 1$  punktigen Gauß – Formel

$$G_m(t) = \frac{1}{m!} \left\{ \int_a^b (x-t)_+^m w(x) - \sum_{v=0}^n a_v (x_v - t)_+^m \right\}$$

wechselt für  $0 \leq m \leq 2n + 1$  auf  $[a, b]$  genau  $2n + 1 - m$  – mal sein Vorzeichen.  
 Insbesondere hat  $G_{2n+1}$  keine Vorzeichenwechsel.

im Beweis:  $\frac{d}{dt} G_{m+1}(t) = -G_m(t)$ ,  $m=0, \dots, 2n$

**Korollar:** Sei  $f \in C^{2n+2}[a,b]$ , dann gilt für die  $n+1$ -punktige Gaußformel die Fehlerdarstellung

$$R(f) = \frac{1}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi) \cdot \int_a^b \omega_{n+1}^2 w(x) dx, \quad \xi \in [a,b].$$

**Beispiele**

Intervall	Gewichtsfunktion	orth. Polynomsystem
$[-1,1]$	1	Legendre Polynome
$[-1,1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	Tschebyscheff Polynome 1. Art
$[-1,1]$	$\sqrt{1-x^2}$	Tschebyscheff Polynome 2. Art
$[-1,1]$	$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \alpha, \beta > 1$	Jacobi – Polynome
$]-\infty, \infty[$	$e^{-x^2}$	Hermite – Polynome
$[0, \infty[$	$e^{-x}$	Laguerre - Polynome

**Bemerkung:** Oft  $f(a)$  oder  $f(b)$  bekannt (oder beide), dann Formel des Typs

$$(i) a_0 f(a) + \sum_{v=1}^n a_v f(x_v) \text{ bzw. Exaktheitsgrad } 2n \text{ (Lobatto – Formel)}$$

$$\sum_{v=1}^n a_v f(x_v) + a_0 f(b)$$

oder des Typs

$$(ii) a_0 f(a) + \sum_{v=1}^{n-1} a_v f(x_v) + a_n f(b) \text{ Exaktheitsgrad } 2n + 1 \text{ (Radau – Formel)}$$

**10.4. Das Romberg-Verfahren**

**Definition:** Die Bernoulli-Polynome  $B_v \in Q_v, v=0,1,2,\dots$  sind definiert durch

- (i)  $B_v(x) = 1$
- (ii)  $B_v' = v B_{v-1} \quad v=1,2,\dots$
- (iii)  $\int_0^1 B_v(t) dt = 0 \quad v=1,2,\dots$

Es gilt:  $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{2} x$$

**Satz 10.4.1.:** Es gilt

$$(i) B_v(0) = B_v(1) \quad \text{für } v=2,3,\dots \quad (\text{und } v=0)$$

- (ii)  $B_\nu(x) = (-1)^\nu B_\nu(1-x)$  für  $\nu=0,1,2,\dots$
- (iii)  $B_{2\nu+1}(0) = B_{2\nu+1}(1) = 0$  für  $\nu=1,2,3,\dots$  (ab  $B_3$ )
- (iv)  $B_{2\nu+1}(\frac{1}{2}) = 0$  für  $\nu=0,1,2,\dots$  (ab  $B_1$ )

**Bemerkung:** Die Zahlen  $B_\nu = B_\nu(0)$ ,  $\nu=0,1,2,\dots$  heißen Bernoulli-Zahlen.  
 Sie treten z.B. auf in der Entwicklung

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!} z^\nu$$

**Satz 10.4.2.:** Das Bernoulli-Polynom  $B_{2\nu+1}$ ,  $\nu=1,2,\dots$  besitzt in  $[0,1]$  genau die einfachen Nullstellen  $0, \frac{1}{2}, 1$ .

**Satz 10.4.3.:** Für die geraden Bernoulli-Polynome  $B_{2\nu}$ ,  $\nu=1,2,\dots$  gilt

$$B_{2\nu}(x) \neq B_{2\nu}(0) = B_{2\nu}(1) \neq 0 \quad \forall x \in ]0,1[$$

**Satz 10.4.4.** (Euler-Maclarinsche Summenformel)

Für  $f \in C^{2m+1}[0,n]$  gilt

$$\sum_{\nu=0}^n f(\nu) = \int_0^n f(x) dx + \frac{f(0)+f(n)}{2} + \sum_{\mu=1}^m \frac{B_{2\mu}}{(2\mu)!} \{f^{(2\mu-1)}(n) - f^{(2\mu-1)}(0)\} + R_m$$

$$R_m = \frac{1}{(2m+1)!} \int_0^n \bar{B}_{2m+1}(x) f^{(2m+1)}(x) dx$$

Hierbei heißt  $\bar{B}_\mu$  das periodisch fortgesetzte Bernoulli-Polynom  $B_\mu$

$$\bar{B}_\mu(x) = B_\mu(x - [x])$$

**Bemerkung:**  $R_m = -\frac{1}{(2m)!} \int_0^n \bar{B}_{2m}(x) f^{(2m)}(x) dx$

**Satz 10.4.5.:** Sei  $m \in \mathbb{N}_0$ ,  $f \in C^{2m}[a,b]$  und

$$T(h) = h \left\{ \frac{f(a)}{2} + \sum_{\nu=1}^{n-1} f(a + \nu h) + \frac{f(b)}{2} \right\}, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

die summierte Trapezregel.

Dann ist

$$\int_a^b f(x) dx = T(h) - \sum_{\mu=1}^{m-1} \frac{B_{2\mu}}{(2\mu)!} h^{2\mu} [f^{(2\mu-1)}(b) - f^{(2\mu-1)}(a)] - \frac{B_{2m}}{(2m)!} h^{2m} f^{(2m)}(\xi)$$

mit einem  $\xi \in ]a,b[$

**Korollar:** Es sei  $f \in C^{2m}[a,b]$  periodisch mit Periode  $b-a$ , dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum_{\nu=1}^n f(a + \nu h) - \frac{B_{2m}}{(2m)!} h^{2m} f^{(2m)}(\xi), \quad h = \frac{b-a}{n}$$

Mit Hilfe des Extrapolationsverfahrens ergibt sich das Romberg Verfahren:

**Algorithmus (Romberg Verfahren)**

Gegeben:  $f \in C[a, b]$ ,  $m \in \mathbb{N}$

Gesucht: Näherungen  $T_i^{(k)}$  an  $\int_a^b f(x) dx$ ,  $i = 0, \dots, n$  und  $k = 1, \dots, m$ .  $h_0 := b - a$ ,

$$T_0^{(1)} = T(h_0).$$

Für  $i = 1, \dots, m$ ,  $h_i = \frac{1}{2} h_{i-1}$   $T_i^{(1)} = T(h_i)$  (Trapezsumme, Schrittweite  $h_i$ )

$$T_i^{(k)} = T_{i+1}^{(k)} + \frac{T_{i+1}^{(k-1)} - T_i^{(k-1)}}{4^k - 1}, \quad i = 0, \dots, m - k.$$

$$T_i^{(0)} = \frac{h}{2} \cdot [f(a) + 2f(a+h_i) + \dots + 2f(b-h_i) + f(b)]$$

$$= \frac{1}{2} T_{i-1}^{(0)} + h_i \sum_{v=1}^{2^{(i-1)}} f(a + (2v-1)h_i).$$

**Satz 10.4.6.:** (Bulirsch, Num. Mathematik, Bd. 6, 1964, 6 – 16)

Sei  $f \in C^{2n+2}[a,b]$  und  $T_i^{(k)}$  nach dem Romberg Verfahren. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx - T_i^{(k)} = (b-a)^{2n+3} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{(k+1)(k+2i)}} \cdot \frac{B_{2k+2}}{(2k+2)!} f^{(2n+2)}(\xi),$$

$\xi \in ]a, b[$ , von  $f$  und  $i$  und  $k$  abhängig.

**Korollar:** Sei  $f$  und  $T_i^{(k)}$  wie oben. Dann gilt

- i)  $f \in Q_{2n+1} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = T_i^{(k)}$  Quadraturformel, - formel
- ii)  $\lim_{i \rightarrow \infty} \left[ T_i^{(k)} - \int_a^b f(x)dx \right] \cdot 4^{ik} = 0$  geht stärker als  $4^{ik}$  gegen Null.

## 11. Numerische Lösung von Anfangswertaufgaben:

### 11.1 Einführung:

Anfangswertaufgabe (AWA)

Gegeben:  $f : G \rightarrow \mathbf{R}$  stetig,  $G \subset \mathbf{R}^2$  ( $u, v$ )  $\in G$

Gesucht: (Intervall  $[a,b]$  und) Funktion

$y \in C^1[a,b]$  mit

- i)  $(x, y(x)) \in G \quad \forall x \in [a,b]$
- ii)  $y(u) = v, \quad u \in [a,b]$
- iii)  $y'(x) = f(x, y(x))$

**Bemerkung:** Ist  $f$  stetig, dann existiert wenigstens eine Lösung  $y$  der AWA (Existenzsatz von Peano)

Ist  $f$  lipschitz – stetig bzgl.  $y$ , d.h.

$\exists L > 0: |f(x,y) - f(x,y')| \leq L |y - y'| \quad \forall (x,y), (x,y') \in G$

Dann gilt: Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

**Lemma 11.1.1.:**  $f$  ist Lip.-stetig bzgl.  $y$  in jeder kompakten konvexen Teilmenge von  $G$ ,

falls  $\frac{\partial f}{\partial y}$  in  $G$  ex. und stetig ist.

**Satz 11.1.2.** (Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf)

$G \subset \mathbf{R}^2$  Gebiet,  $f$  auf  $G$  lipschitzstetig bzgl.  $y$ , ( $u,v$ )  $\in G$ .

Dann existiert ein  $I_\delta = [u-\delta, u+\delta]$ ,  $\delta > 0$ , so daß die AWA

$$y' = f(x,y) \quad , \quad y(u) = v$$

genau eine Lösung besitzt.

Sie liegt in  $C^1[I_\delta]$ .

Sie ist berechenbar mit der sog. Picard-Iteration

$$y_0(x) := v \quad \forall x \in I_\delta$$

$$y_v(x) := v + \int_u^x f(t, y_{v-1}(t)) dt \quad \forall x \in I_\delta, v \geq 1$$

**Satz 11.1.3.:** Jede Lösung  $y$ , die in einem Intervall  $I_\delta = [u-\delta, u+\delta]$  die AWA

$$y' = f(x, y), \quad y(u) = v$$

löst, läßt sich fortsetzen zu einer (maximalen) Lösung  $z$ , die in  $I_\delta$  mit  $y$  übereinstimmt und deren Graph für wachsendes und fallendes  $x$  gegen den Rand von  $G$  strebt.

### 11.2. Das Eulersche Polygonzugverfahren

$$x_k = x_{k-1} + h$$

$$y_k = y_{k-1} + h \cdot f(x_{k-1}, y_{k-1}), \quad k=1, \dots, n$$

Eulersches Polygonzugverfahren

Interpretation des Eulerschen Polygonzugverfahrens

Taylor: Annäherung über Taylorentwicklung von  $y$

„Rechteckregel“: Annäherung über das Integral über  $f$

num. Differentiation: Annäherung über die Ableitung von  $y$

**Anmerkung:** Das Eulersche Polygonzugverfahren ist auch auf Systeme von DGLs anwendbar. Die Durchführung ist dann komponentenweise.

$$Y^{(k)} = Y^{(k-1)} + h \cdot F(x_{k-1}, Y^{(k-1)}) \quad \text{mit } Y^{(v)} \in \mathbf{R}^m \quad \forall v \in \mathbf{N}_0$$

### 11.3 Einschrittverfahren:

Statt  $y_k = y_{k-1} + h f(x_k, y_{k-1})$

jetzt  $y_k = y_{k-1} + h \phi(f, x_{k-1}, y_{k-1}, h)$  (Zuwachsfunktion)

Zur Vereinfachung

$$\phi(x_{k-1}, y_{k-1}, h)$$

**Definition:**  $y_0 := y(x_0)$ ,

$$x_k := x_{k-1} + h$$

$$y_k := y_{k-1} + h \phi(x_{k-1}, y_{k-1}, h) \quad (k = 1, \dots, n)$$

heißt allgemeines Einschrittverfahren.

$$\frac{y_k - y_{k-1}}{h} = \phi(x_{k-1}, y_{k-1}, h) \quad \text{Näherung an einen Wert } y'(\xi) = f(\xi, y(\xi)).$$

exakter relativer Zuwachs:  $(x, y) \in G$  beliebig

$z$  löst AWA  $z' = f(t, z)$  und  $z(x) = y$ .

$$\Delta(x, y, h) := \begin{cases} \frac{z(x+h) - y}{h}, & h \neq 0 \\ f(x, y), & h = 0 \end{cases}$$

Wegen  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(x+h) - y}{h} = f(x, y) = z'(x)$  ist  $\Delta$  in 0 stetig!

**Beispiel:**

**Definition:**  $(x, y) \in G$  beliebig,  $h$  Schrittweite.

Die Funktion

$$\theta(x, y, h) := \Delta(x, y, h) - \phi(x, y, h)$$

heißt lokaler Diskretisierungsfehler.

**Definition:** Ein durch eine (von  $f$  abhängige) Zuwachsfunktion  $\phi, \phi: G \times [0, h_0] \rightarrow \mathbf{R}, h_0 > 0$  vorgegeben, gegebenes Einschrittverfahren heißt **konsistent** in  $G$ , wenn für alle  $(x, y) \in G$  und alle in  $G$  stetig partiell diffbaren Funktionen stets

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta(x, y, h) = 0 \quad \text{gilt.}$$

**Beispiel:**

**Definition:** Ein Einschrittverfahren hat die Konsistenzordnung  $p$ , wenn für alle  $(x,y) \in G$  und alle in  $G$   $p$  – mal stetig diffbaren  $f$  stets  
 $\theta(x,y,h) = O(h^p)$  für  $h \rightarrow 0$   
 gilt.

**11.4. Der Taylorabgleich:**

Sei  $f$  genügend oft diffbar.

**Resultat:** Wählt man als Verfahrensfunktion das Taylorpolynom  $(p-1)$ -ten Grades der exakten Zuwachsfunktion entwickelt nach Potenzen von  $h$ , dann erhält man ein Einschrittverfahren der Konsistenzordnung  $p$ .

$p = 1: \phi(x,y,h) = f(x,y)$  (Euler)

$p = 2: \alpha(x,y,h) = f(x,y) + \frac{1}{2} h \{f_x(x,y) + f(x,y)f_y(x,y)\}$  (Verfahren 2. Ordnung)

**Beispiel:**

**11.5 Runge – Kutta – Verfahren der Ordnung 2**

Idee: bessere Näherung durch Mittelung von Steigungswerten

Ansatz:  $\phi(x,y,h) = \alpha f(x,y) + \beta f(x + \gamma h, y + \delta h f(x,y))$

daraus resultiert bei festem  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  das Einschrittverfahren.

$y_k = y_{k-1} + h \phi(x_{k-1}, y_{k-1}, h) = y_{k-1} + h [\alpha f(x,y) + \beta f(x + \gamma h, y + \delta h f(x,y))]$

allgemeines (2-stufiges) Runge Kutta Verfahren.

Ziel: Finde  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  so, daß das RKV die Konvergenzordnung 2 hat.

Nach Taylor ergibt sich  $\alpha + \beta = 1$

$\frac{1}{2} = \beta\gamma$

$\frac{1}{2} = \beta\delta$

( $\beta = 0 \Rightarrow$  Ordnung ist  $< 2$ ; ist das Eulersche Polygonzugverfahren  $\Rightarrow$  Euler hat Konsistenzordnung 1)

**Satz 11.5.1:** Für  $\beta \neq 0$  wird ein Runge-Kutta-Verfahren zweiter Ordnung definiert durch die Verfahrensfunktion

$\phi_\beta(x,y,h) = (1-\beta) f(x,y) + \beta f(x + \frac{1}{2\beta} h, y + \frac{1}{2\beta} h f(x,y))$

$|\beta|$  sehr klein macht keinen Sinn, da dann  $f$  bei sehr großen Werten ausgewertet wird.

$|\beta|$  sehr groß macht auch keinen Sinn Auswertung etwa an  $f(x,y)$ .

**Beispiel:**  $\beta = \frac{1}{2}$  :Verfahren von Heun (Verallgemeinerung der Trapezregel)

$\beta = 1$ : Halbschrittverfahren

**11.6. Allgemeine Runge-Kutta-Verfahren:**

**Definition:** Mit

$k_1 := f(x, y)$

$k_r := f(x + a_r h, y + h \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} k_s)$   $r = 2, \dots, R$

wird durch

$$\phi(x, y, h) = \sum_{r=1}^R c_r k_r$$

ein R-stufiges Runge-Kutta-Verfahren (RKV) definiert, falls

$$a_r = \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} \quad r = 2, \dots, R$$

**Runge-Kutta-Schema**

$a_1$				
$a_2$	$b_{21}$			
$a_3$	$b_{31}$	$b_{32}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
$a_R$	$b_{R1}$	$b_{R2}$	$\dots$	$b_{R,R-1}$
	$c_1$	$c_2$	$\dots$	$c_{R-1} \quad c_R$

**Lemma 11.6.2.**

Wenn das RKV konsistent ist, dann gilt

$$\sum_{r=1}^R c_r = 1$$

**Lemma 11.6.2.:** Die Bedingungen  $a_r = \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs}$ ,  $r = 2, \dots, R$  sind äquivalent zu

$$y'(x+ha_r) - k_r = P(h^2) \quad \text{für } h \rightarrow 0$$

**Folgerung:**  $\phi(x, y, h) = \sum_{r=1}^R c_r y'(x + ha_r) + P(h^2)$  ( $a_1=0$ )

(Zuwachsfunktion ist Mittelung der Ableitungen)

**Beispiele**

1-stufiges Verfahren

$0$	$-$	
	$1$	Eulersches Polygonzug-Verfahren (Ordnung 1)

2-stufiges Verfahren

$0$			
$\frac{1}{2\beta}$	$\frac{1}{2\beta}$	$\beta \neq 0$	allgemeines RKV der Ordnung 2
	$1 - \beta$	$\beta$	

Speziell

$0$			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\beta = 1$	Halbschrittverfahren oder modifiziertes Euler-Verfahren
	$0$	$1$	

$0$			
$1$	$1$	$\beta = \frac{1}{2}$	Heun
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

3-stufige Verfahren

$0$			
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		
$\frac{2}{3}$	$0$	$\frac{2}{3}$	Heun (3. Ordnung)
	$\frac{1}{4}$	$0$	$\frac{3}{4}$

$$\begin{array}{c|cc}
 0 & & \\
 \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\
 1 & -1 & 2 \\
 \hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6}
 \end{array}$$

Kutta (3. Ordnung)

(die c's stellen die Gleichgewichtsverteilung der Simpson-Regel dar)

4-stufiges Verfahren

$$\begin{array}{c|ccc}
 0 & & & \\
 \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\
 \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \\
 1 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
 \end{array}$$

„klassisches“ RKV

(die c's stellen die Gleichgewichtsverteilung der nächsten Newton-Cotes-Regel dar)

**Bemerkung:** Durch

$$\begin{array}{c|cc}
 0 & & \\
 a_2 & a_2 & \\
 a_3 & a_3 - b_{32} & b_{32} \\
 \hline
 & c_1 & c_2 & c_3
 \end{array}$$

ist genau dann ein RKV der Ordnung 3 gegeben, wenn

$$\begin{aligned}
 c_1 + c_2 + c_3 &= 1 \\
 c_2 a_2 + c_3 a_3 &= \frac{1}{2} \\
 c_2 a_2^2 + c_3 a_3^2 &= \frac{1}{3} \\
 c_3 b_{32} a_2 &= \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

⇒ Lösungsschar hängt von 2 freien Parametern ab

z.B.:  $c_3 = \gamma$ ,  $a_2 = \alpha$

Durch

$$\begin{array}{c|ccc}
 0 & & & \\
 a_2 & b_{21} & & \\
 a_3 & b_{31} & b_{32} & \\
 a_4 & b_{41} & b_{42} & b_{43} \\
 \hline
 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4
 \end{array}$$

ist genau dann ein RKV der Ordnung 4 gegeben, wenn ... (siehe Skript !!!)

GLEICHUNGEN im Skript SIND NICHT PRÜFUNGSRELEVANT !!!

**Bemerkung:** Ist  $\rho(R)$  die maximale erreichbare Konsistenzordnung eines R-stufigen RKV, dann gilt

$$\begin{aligned}
 \rho(1) &= 1 & \rho(6) &= 5 \\
 \rho(2) &= 2 & \rho(7) &= 6 \\
 \rho(3) &= 3 & \rho(8) &= 6 && \text{(weiteres siehe Butcher)} \\
 \rho(4) &= 4 & \rho(9) &= 7 \\
 \rho(5) &= 5 & \rho(R) &\leq R-2 && \text{für } R \geq 10
 \end{aligned}$$

### 11.7. Konvergenz von Einschrittverfahren

Ziel: Zusammenhang von Konvergenz(ordnung) und Konsistenz(ordnung)

**Definition:** Gegeben sei AWA  $y'(x) = f(x,y)$ ,  $y(x_0) = \eta$  und  $x \in I_\delta$  und ein Einschrittverfahren.

Für jedes  $n \in \mathbf{N}$  sei

$$h_{nx} = \frac{x-x_0}{n}$$

Dann ist

$$e_n(x) := y(x) - y_n^{(h_{nx})}$$

der globale Diskretisierungsfehler (Verfahrensfehler).

**Definition:** Ein Einschrittverfahren heißt konvergent in einem Rechteck  $R = [x_0, b] \times [c, d]$ , falls für alle AWA

$$y'(x) = f(x, y), y(x_0) = \eta$$

mit in  $\mathbf{R}$  stetig differenzierbarem  $f$  und mit

$$y(x) \in [c, d] \quad \forall x \in [x_0, b]$$

stets aus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_0^{(h_{nx})} = \eta$$

auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^{(h_{nx})} = y(x)$$

folgt für jedes  $x \in [x_0, b]$ .

**Definition:** Ein Einschrittverfahren hat die Konvergenzordnung  $p$  im Rechteck

$R = [x_0, b] \times [c, d]$ , wenn für alle AWA  $y'(x) = f(x, y), y(x_0) = \eta$  mit stetig  $p$  mal differenzierbarem  $f$  und alle  $x \in [x_0, b]$  stets aus

$$e_0 = \eta - y_0^{(h_{nx})} = P(h_{nx}^p), \quad h_{nx} \rightarrow 0$$

folgt

$$e_n(x) = y(x) - y_n^{(h_{nx})} = P(h_{nx}^p), \quad h_{nx} \rightarrow 0$$

Konsistenz - lokaler Diskretisierungsfehler  $\theta$

Konvergenz - globaler Diskretisierungsfehler  $e_n$

**Lemma 11.7.1:** Gegeben  $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbf{R}, A \geq 0, B \geq 0$ .

Es gelte:  $|\xi_v| \leq |\xi_{v-1}| + B$ .

Dann folgt  $|\xi_v| \leq A^v |\xi_0| + \begin{cases} \frac{A^v - 1}{A - 1} B, & A \neq 1 \\ vB, & A = 1 \end{cases}$

**Lemma 11.7.2:** Gegeben  $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbf{R}, A \geq 0, B \geq 0$ .

Es gelte:  $|\xi_v| \leq |\xi_{v-1}| + B$ .

Es sei  $A = 1 + \delta, \delta > 0$ .

Dann gilt  $|\xi_0| \leq e^{v\delta} |\xi_0| + \frac{e^{v\delta} - 1}{\delta} B$ .

**Satz 11.7.3:** Die Verfahrensfunktion  $\phi$  mit

$$\phi: [x_0, b] \times [c, d] \times [0, h_0] \rightarrow \mathbf{R}$$

sei für alle stetig diffbaren Funktionen  $f$  auf  $[x_0, b] \times [c, d] \times [0, h_0]$  stetig diffbar.

Dann sind äquivalent:

(i) Das durch  $\phi$  definierte Einschrittverfahren ist konsistent im Rechteck

$$R = [x_0, b] \times [c, d].$$

(ii) Das durch  $\phi$  definierte Einschrittverfahren ist konvergent im Rechteck

$$R = [x_0, b] \times [c, d].$$

**Satz 11.7.4:** Sei die Verfahrensfunktion  $\phi$  stetig auf  $S = [x_0, b] \times [c, d] \times [0, h_0]$  und genüge einer Lipschitzbedingung der Form

$$|\phi(x, y, h) - \phi(x, \tilde{y}, h)| \leq L |y - \tilde{y}| \quad \forall (x, y, h), (x, \tilde{y}, h) \in S.$$

Dann gilt für alle  $0 < h \leq h_0$ :

$$|y(x_v) - y_v| \leq e^{L(x-x_v)} |y(x_v) - y_v| + \frac{e^{L(x-x_v)} - 1}{L} |\theta(x_{v-1}, y(x_{v-1}), h)|$$

Insbesondere hat das Verfahren die Konvergenzordnung  $r$ , wenn es die Konsistenzordnung  $r$  besitzt.

### 11.8 Einschrittverfahren in der Praxis:

Bisher: konstante Schrittweite (gut für Analyse)

Jetzt: variable Schrittweite (gut für Praxis)

Problem: Finde für ein  $\xi$  den Wert  $y(\xi)$ , wo  $y$  gegeben ist durch AWA

$$y' = f(x,y), \quad y(u)=v. \quad (\xi \text{ in der Nähe von } u)$$

$$x_0 = u, \quad x_n = \xi, \quad x_i := x_{i-1} + h_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ziel: Möglichst wenig Schritte aber genau genug.

Gesucht:  $h_1, \dots, h_n$ :  $h_1 + \dots + h_n = \xi - u, \quad |y(\xi) - y_n| < \varepsilon.$

Schwierigkeiten:

- Fehlerabschätzungen für Verfahrensfehler bei einem Schritt enthalten höhere Ableitungen (Unpraktisch  $\rightarrow$  Heuristische)
- Fehlerabschätzungen (Verfahrensfehler und Rundungsfehler) „natürliche Instabilität“ hängt von  $\frac{\partial f}{\partial y}$  ab.

(siehe weiter im Skript !)

## 12. Lineare Mehrschrittverfahren:

### 12.1 Grundlagen

AWA  $y' = f(x,y), y(x_0) = \eta, x \in [x_0, b]$

$$y(x) = \eta + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \quad x \in [x_0, b]$$

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, y(t)) dt.$$

Damit ergibt sich die Näherung:  $y_{n+1} = y_n + h_n \phi(x_n, y_n, h)$  (Einschrittverfahren)

Idee: Informationen aus vorausgegangenen Schritten nutzen:

$$y_0, y_1, \dots, y_{n+k-1}$$

$$y(x_{n+k}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{n+k}} f(t, y(t)) dt \quad (\text{Annäherung mit Linearkombination von } f(x_i, y_i), \dots)$$

Vereinfachung: konstante Schrittweite ( $f_v := f(x_v, y_v)$  geht nur linear ein in Rekursionsformel)

**Definition:** Gegeben  $\alpha_0, \dots, \alpha_k, \beta_0, \dots, \beta_k \in \mathbf{R}, \alpha_k = 1, (\alpha_0, \beta_0) \neq (0,0)$ . Die Rechenvorschrift

$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}$  heißt (lineares) k – Schritt – Verfahren.  
 $\beta_k = 0 \Rightarrow$  explizites Verfahren,  $\beta_k \neq 0 \Rightarrow$  implizites Verfahren.

$f_{n+j} = f(x_{n+j}, y_{n+j})$

**Beispiel:**

k=1:  $y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2} f_n + \frac{h}{2} f_{n+1}$  „Trapezregel“  
 $y_{n+1} - y_n = hf_n$  Euler (explizit)  
 $y_{n+1} - y_n = hf_{n+1}$  Euler (implizit)  
k=2:  $y_{n+2} - y_n = \frac{2h}{6} \{ f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n \}$  „Simpson“ implizit  
 $y_{n+2} - y_n = 2hf_{n+1}$  „Mittelpunktsregel“ explizit

**Probleme**

- (i) Startwerte  $y_1, \dots, y_{k-1}$  mit beliebigem Einschrittverfahren berechnen. ( $y_0$  ist gegeben)
- (ii) Wie bekommt man  $y_{n+k}$  bei impliziten Verfahren?

Antwort: Man berechnet zunächst  $y_{n+k}^{(0)}$  mit einem expliziten Verfahren  
 (Prädiktor-Verfahren)

Danach implizites Verfahren mit Iterationsansatz

$$y_{n+k}^{(i)} = - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j} + h \beta_k f_{n+k}^{(i-1)} \quad i=1,2,3$$

(oder mehr, wenn nötig)

mit

$$f_{n+k}^{(i-1)} = f(x_{n+k}, y_{n+k}^{(i-1)})$$

Korrektorverfahren

**Lemma:**  $f$  erfülle in  $I_\delta = [y_{n+k}^{(0)} - \delta, y_{n+k}^{(0)} + \delta]$  die Lipschitzbedingung

$$|f(x_{n+k}, t) - f(x_{n+k}, \tilde{t})| \leq L |t - \tilde{t}| \quad \forall t, \tilde{t} \in I_\delta$$

Gilt für die erste Näherung  $y_{n+k}^{(1)}$  der Korrektor-Iteration

$$y_{n+k}^{(1)} - y_{n+k}^{(0)} = \varepsilon \cdot \delta \quad \text{mit } |\varepsilon| < 1$$

und erfüllt die Schrittweite  $h$  die Abschätzung

$$h < \frac{1-|\varepsilon|}{|\beta_k|L}$$

dann konvergiert die Korrektor-Iteration gegen  $y_{n+k}$ .

Es gilt

$$|y_{n+k} - y_{n+k}^{(i)}| \leq \frac{(h|\beta_k|L)^i}{1-h|\beta_k|L} |y_{n+k}^{(1)} - y_{n+k}^{(0)}|$$

**12.2. Konsistenz von MSV**

Einschrittverfahren

$$\theta(x, y, h) = \Delta(x, y, h) - \phi(x, y, h)$$

lokaler Diskretisierungsfehler      exakter rel. Zuwachs      Verfahrens-funktion

$\Delta$  an der Stelle  $(x_v, y_v, h)$  ausgewertet  $\rightarrow z$

Alternative: an der Stelle  $(x_v, y(x_v), h)$  auswerten und Fehler „ $y(x_v)$  statt  $y_v$ “ separat betrachten.

$$\theta(x, y, h) = \frac{1}{h} [y(x+h) - y(x)] - \phi(x, y, h) \quad \text{wegen } z = y \text{ (so gesetzt)}$$

Bei MSV lokaler Diskretisierungsfehler

$$L_h: [x_0, b-kh] \times C^1[x_0, b] \rightarrow \mathbf{R}$$

$$\begin{aligned} (x, y) &\mapsto \frac{1}{h} \sum_{j=0}^k \alpha_j y(x + jh) - \sum_{j=0}^k \beta_j f(x + jh, y(x + jh)) \\ &= \frac{1}{h} \sum_{j=0}^k \alpha_j y(x + jh) - \sum_{j=0}^k \beta_j y'(x + jh) \end{aligned}$$

**Definition:** Ein durch  $\alpha_0, \dots, \alpha_k, \beta_0, \dots, \beta_k$  ( $\alpha_k=1, (\alpha_0, \beta_0) \neq (0,0)$ ) gegebenes MSV heißt konsistent, wenn für alle  $y \in C^2[x_0, b]$  und alle  $x \in [x_0, b[$  gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} L_h(x, y) = 0$$

Es hat die Konsistenzordnung  $p$ , wenn für alle  $y \in C^{p+1}[x_0, b]$  und alle  $x \in [x_0, b[$  gilt

$$L_h(x, y) = O(h^p) \quad (h \rightarrow 0)$$

**Satz 12.2.1:** Für ein  $k$ -Schritt-Verfahren

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}, \quad \alpha_k = 1, (\alpha_k, \beta_k) \neq (0,0) \text{ sind äquivalent:}$$

$$(i) \quad c_0 := \sum_{j=0}^k \alpha_j = 0, \quad c_\mu := \sum_{j=0}^k \left\{ \alpha_j \cdot \frac{j^\mu}{\mu!} - \beta_j \frac{j^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \right\} = 0, \quad \mu = 1, \dots, p$$

(ii) das Verfahren besitzt die Konsistenzordnung  $p$

(iii)  $L_h(x, q) = 0, \quad \forall q \in \mathbb{Q}_p$ .

Beachte: hier heißt konsistent  $\Leftrightarrow$  Konsistenzordnung 1

(Beim ESV heißt Konsistenz  $\Theta(x, y, h) \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ ), aber Konsistenzordnung 1

$\Theta(x, y, h) = O(h)$ !)

**Beispiel:**

### 12.3 Stabilität und Konvergenz:

**Beispiel:** 2 Schritt Verfahren:  $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = -2h f_n$

Verfahren ist konsistent bis zur Ordnung 1.

Anwenden auf Modellgleichung  $y' = 0, y(0) = 0$ .

Exakte Lösung ist  $y \equiv 0$ .

Starte mit Fehler:  $y_0 = 0, y(0) = \varepsilon \Rightarrow y_n = \frac{\varepsilon}{n} (3^n - 1)$

sehr schlecht, da nur kleine Fehler große Abweichungen von der tatsächlichen Lösungen bewirken!

Dazu:

**Satz 12.3.1:** Die homogene lineare Dzgl.  $k$ -ter Ordnung

$$(*) \quad a_k y_{n+k} + \dots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0 \quad \text{mit } a_k a_0 \neq 0$$

hat bei fest vorgegebenen Anfangsbedingungen

$$y_0, \dots, y_{k-1} \in \mathbb{C}$$

genau eine Lösung  $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ . Sie läßt sich schreiben in der Form

$$y_n = \sum_{i=0}^s p_i(n) \cdot \lambda_i^n,$$

wo  $\lambda_i$  eine Nullstelle von  $\rho(x) = \sum_{j=0}^k a_j x^j$  ist mit der Vielfachheit  $m_i, i = 1, \dots, s$  ( $s$

Nullstellen),  $k = \sum_{i=1}^s m_i$  und  $p_i$  ein beliebiges Polynom vom Grad  $< m_i$  ist.

**Folgerung:** Die Lösung  $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$  von (\*) bleibt bei beliebigen  $\{y_0, \dots, y_{k-1}\}$  beschränkt

$$\Leftrightarrow |\lambda_i| \leq 1 \text{ und } |\lambda_i| = 1 \Rightarrow m_i = 1.$$

inhomogene Dzgl. allgemeine Lösung: finde eine Lösung der inhomogenen Dzgl und addiere allgemeine Lösung der homogenen Dzgl dazu.

„Einschubsvorlesung“ von Ralf Tenberg

**Definition:** Die (x,y)-Ebene heißt dann die Phasenebene des Systems 1. Ordnung und die Kurve  $\{(x(t), y(t)) \mid t \text{ strebt von } 0 \text{ bis } \infty\}$  heißt die Phasenkurve.

Reguläre Vorlesung bei Prof. Möller

k-Schritt-Verfahren

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f(x_{n+j}, y_{n+j})$$

ist inhomogene Dzgl. k-ter Ordnung, wenn  $f$  von  $y$  unabhängig.

**Definition:** Ein k-Schritt-Verfahren heißt asymptotisch stabil, wenn die Fundamentallösungen beschränkt bleiben.

**Satz 12.3.2.** (Wurzelkriterium von Dahlquist)

Ein k-Schritt-Verfahren ist genau dann asymptotisch stabil, wenn das charakteristische Polynom

$$\rho(x) = \sum_{j=0}^k \alpha_j x^j$$

der Dzgl. die folgende Wurzelbedingung erfüllt

- Alle Nullstellen von  $\rho$  liegen im abgeschlossenen Einheitskreis

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$$

- Alle Nullstellen von  $\rho$  mit  $|z|=1$  sind einfach

$$\rho(x) = \sum_{j=0}^k \alpha_j x^j \quad \text{erstes charakteristisches Polynom des k-Schritt-Verfahrens}$$

$$\sigma(x) = \sum_{j=0}^k \beta_j x^j \quad \text{zweites charakteristisches Polynom}$$

**Konsistenzbedingung** (12.2.1.)

$$\rho(1) = 0$$

$$\rho'(1) = \sigma(1) \neq 0$$

1: Hauptwurzel (des 1. charakteristischen Polynoms)

**Definition:** Ein k-Schritt-Verfahren heißt konvergent (in einem Rechteck  $R=[x_0, b] \times [c, d]$ ), wenn für alle AWA

$$y' = f(x, y) \quad , \quad y(x_0) = \eta$$

$f$  stetig partiell differenzierbar in  $R$ ,  $y(x) \in [c, d]$  für alle  $x \in [x_0, b]$  stets für alle  $x \in [x_0, b]$  gilt:

$$\text{Aus } \lim_{n \rightarrow \infty} y_i^{(h_{nx})} = \eta, \quad i=0, \dots, k-1 \text{ folgt } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n^{(h_{nx})} = y(x).$$

Ein k-Schritt-Verfahren hat die Konsistenzordnung  $p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , wenn für alle AWA mit  $y \in C^{p+1}[x_0, b]$  aus

$$y_i^{(h_{nx})} - \eta = P(h_{nx}^p) \quad i=0, 1, \dots, k-1$$

auch

$$e_n(x) = P(h_{nx}^p) \quad (n \rightarrow \infty)$$

folgt.

**Satz (Dahlquist)**

Ein k-Schritt-Verfahren ist genau dann konvergent, wenn es konsistent und asymptotisch stabil ist. (also: Konvergenz  $\Leftrightarrow$  Konsistenz + asymptotische Stabilität)

**12.4. Lokaler und globaler Diskretisierungsfehler**

$L_h$  ist lokaler Diskretisierungsfehler (bei linearen Mehrschrittverfahren)

Für  $y \in C^{p+1}[x_0, b]$  ergibt sich für den lokalen Diskretisierungsfehler eines Verfahrens der Konsistenzordnung  $p$

$$L_h(x, y) = \int_x^{x+kh} y^{(p+1)}(t) G_p(x, t) dt$$

mit Peano-Kern

$$G_p(x, t) = L_h(x, \frac{(x-t)_+^p}{p!}) \quad (\text{hängt noch von } x \text{ ab!})$$

**Satz 12.4.1** Der lokale Diskretisierungsfehler für ein k-Schritt Verfahren der Konsistenzordnung  $p$  läßt sich umschreiben in die Peano - Form:

$$L_h(x, y) = h^p \int_0^k \tilde{G}(\tau) y^{(p+1)}(x + h\tau) d\tau \quad \text{und}$$

$$\tilde{G}_p(\tau) = \sum_{j=0}^k \left\{ \alpha_j \frac{(j-\tau)_+^p}{p!} - \beta_j \frac{(j-\tau)_+^{p-1}}{(p-1)!} \right\}, \quad (\text{hängt nicht mehr von } x \text{ ab})$$

wenn  $y \in C^{p+1}[x_0, b]$  Lösung der AWA  $y' = f(x, y)$  und  $y(x_0) = \eta$ .

**Beispiel:**

**Satz 12.4.2:** Für ein asymptotisch stabiles k - Schritt - Verfahren der Konsistenzordnung  $p$  hat der globale Diskretisierungsfehler die Ordnung  $p$ , falls die Startnäherungen  $y_0, \dots, y_{k-1}$  den Anfangswert mindestens mit derselben Ordnung für  $h \rightarrow 0$  approximieren. (? vgl. Vorlesung ?) (Fehlender Teil des Satzes von Dahlquist)

**12.5. Die Verfahren von Adams - Bashforth und Adams - Moulton:**

Bei Adams-Bashforth ersetzt man  $f(t, y(t))$  durch das Interpolationspolynom  $p_k$ , das  $f(t, y(t))$  in  $x_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n$  interpoliert und  $f(x_v, y(x_v))$  durch Näherung  $f_v = f(x_v, y_v)$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} p_k(t) dt = y_n + h \sum_{j=0}^k \beta_{k-j} f_{n-j}$$

Verfahren hat Konsistenzordnung  $k+1$

**Beispiel (k=1)**  $y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n)$  explizit

**Adams-Bashforth (AB)**

$p_k$  interpoliert  $f_{n-j}$  in  $x_{n-j}, j=0, \dots, k$

$$\Rightarrow p_k(x) = f_{n-k} + \frac{1}{h} \Delta f_{n-k} (x - x_{n-k}) + \frac{1}{2h^2} \Delta^2 f_{n-k} (x - x_{n-k})(x - x_{n-k+1})$$

$$+ \dots + \frac{1}{k! h^k} \Delta^k f_{n-k} (x - x_{n-k}) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})$$

mit  $\Delta^0 f_{n-j} = f_{n-j}$

$$\Delta^i f_{n-j} = \Delta^{i-1} f_{n-j+1} - \Delta^{i-1} f_{n-j}$$

$\Delta^j f_{n-j}$  ist Linearkombination von  $f_{n-j}, \dots, f_n$

$$\Rightarrow y_{n+1} - y_n = h \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \Delta^j f_{n-k} \int_k^{k+1} t(t-1) \cdot \dots \cdot (t-(j-1)) dt$$

$$\Rightarrow \exists \beta_0, \dots, \beta_k: \quad y_{n+1} - y_n = h(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n-1} + \dots + \beta_k f_{n-k})$$

(k+1)-Schritt-Verfahren, explizit

**Satz 12.5.1:** Das (k+1)-Schritt-Verfahren von AB ist explizit, stabil und hat Konsistenzordnung k+1.

*Problem:*  $\Delta$ 's sind zu unpraktisch, da im Schema die untere Zeile neu zu berechnen ist, das komplette Schema aber dazu gespeichert werden muß!

*Besser:* rückwärtsgenommene Differenzen

$$\begin{aligned} \nabla^0 f_j &= f_j \\ \nabla^i f_j &= \nabla^{i-1} f_j - \nabla^{i-1} f_{j-1} \end{aligned}$$

*Ergebnis:* Im Schema ist nun die oberste Zeile jeweils neu zu berechnen und man muß nun nur noch die letzte oberste Zeile speichern!

Somit ergibt sich:

**Satz 12.5.2:** Das (k+1)-Schritt-Verfahren von AB läßt sich darstellen als

$$y_{n+1} - y_n = h \sum_{j=0}^k c_j \nabla^j f_n$$

mit

$$c_j = (-1)^j \int_0^1 \binom{-t}{j} dt = (-1)^j \int_0^1 \frac{(-t)(-t-1)\dots(-t-j+1)}{j!} dt, \quad j=0, \dots, k$$

**Bemerkung:**  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = \frac{1}{2}$ ,  $c_2 = \frac{5}{12}$ ,  $c_3 = \frac{3}{8}$ ,  $c_4 = \frac{251}{720}$

Allgemein gilt Rekursionsformel:

$$\sum_{i=0}^k \frac{c_{k-i}}{i+1} = 1 \quad \text{für } k \geq 0$$

Adams-Moulton (AM)

$q_k$  interpoliert  $f_{n+1-j}$  in  $x_{n+1-j}$ ,  $j=0, \dots, k$

$$\Rightarrow q_k(t) = \sum_{j=0}^k \frac{\nabla^j f_{n+1}}{h^j j!} (t - x_{n+1})(t - x_n) \cdot \dots \cdot (t - x_{n-j+2})$$

$$\Rightarrow y_{n+1} - y_n = h \sum_{j=0}^k \nabla^j f_{n+1} (-1)^j \int_{-1}^0 \binom{-t}{j} dt$$

$$\Rightarrow \exists \beta_0, \dots, \beta_k: \quad y_{n+k} - y_{n+k-1} = h(\beta_0 f_{n+k} + \beta_1 f_{n+k-1} + \dots + \beta_k f_n)$$

k-Schritt-Verfahren, implizit

**Satz 12.5.3:** Das k-Schritt-Verfahren von Adams-Moulton ist implizit, stabil und hat Konsistenzordnung k+1.

Es gilt:

$$y_{n+1} - y_n = h \sum_{j=0}^k (-1)^j \nabla^j f_{n+1} \gamma_j$$

mit

$$c_j = \int_{-1}^0 \binom{-t}{j} dt, \quad \tilde{\gamma}_j = (-1)^j \gamma_j$$

**Beispiel:**  $\tilde{\gamma}_0 = 1$ ,  $\tilde{\gamma}_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $\tilde{\gamma}_2 = -\frac{1}{12}$ ,  $\tilde{\gamma}_3 = \frac{1}{24}$

k=0:  $y_{n+1} - y_n = h f_{n+1}$  impliziter Euler

k=1:  $y_{n+1} - y_n = h(\frac{1}{2} f_{n+1} + \frac{1}{2} f_n)$  Trapezregel

k=2:  $y_{n+1} - y_n = h(\frac{5}{12} f_{n+1} + \frac{2}{3} f_n - \frac{1}{12} f_{n-1})$  2-Schritt-Verfahren mit a=0 aus §7.2

*In der Praxis:*

(k+1)-Schritt-Verfahren von AB als Prädiktor

k-Schritt-Verfahren von AM als Korrektor mit fester Anzahl von Korrektoriterationen  
(2-3 Stück)

*Vorteil:*

Die Rückwärtsgenommenen Differenzen zur Berechnung von  $y_{n+1}^{(AM)}$  können in der nächsten Schleife zur Berechnung von  $y_{n+2}^{(AB)}$  benutzt werden.

*Generell gilt (ohne Beweis):*

Wenn das Prädiktor-Verfahren die Konsistenz-Ordnung  $p^*$  hat und l Korrektor-Schritte gemacht werden, also

$$y_{n+k}^{(0)} \quad \text{Prädiktor}$$

$$(*) \quad y_{n+k}^{(i)} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j} + hf(x_{n+k}, y_{n+k}^{(i-1)}) \quad , i=1, \dots, l$$

wobei (\*) ein Korrektor-Verfahren der Konsistenzordnung p ist, dann hat das Verfahren

$$y_{n+k} := y_{n+k}^{(l)} \quad [P(EC)^l E]$$

(Prädiktor, (Auswertung, Korrektor) l-mal, Auswertung)

die Konsistenzordnung

$$\min\{p^*+l, p\}$$

**Satz 12.5.4:** Für die maximal erreichbare Konsistenzordnung  $p^*$  von stabilen k-Schritt-Verfahren gilt

$$p^* = \begin{cases} k+1 & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ k+2 & \text{falls } k \text{ gerade} \end{cases}$$

ist.

**Backward-Difference-Formula (BDF)**

Interpoliere  $y_{n+j}$  in  $x_{n+j}$ ,  $j=0, \dots, k$ , durch ein  $p_k \in Q_k$  (Ziel: Approximation der Ableitung)

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \nabla^j y_{n+k} = hf_{n+k} \quad \text{BDF}$$

$$\beta_k \neq 0, \beta_j = 0 \quad \text{für } j \neq k$$

**Beispiele für BDF Formeln:**  $k=1$ :  $y_{n+1} - y_n = hf_{n+1}$  impliziter Euler

$$k=2$$
:  $y_{n+2} - \frac{4}{3} y_{n+1} + \frac{1}{3} y_n = \frac{2}{3} hf_{n+2}$

**Satz 12.5.5:** Die rückwärtigen Differentiationsformel (BDF)

$$\sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \nabla^j y_{n+j} = hf_{n+k}$$

ist konsistent mit Konsistenzordnung k.

(!!! PRÜFUNG MIT BEWEIS !!!)

**Bemerkung:** Die BDF sind genau für  $1 \leq k \leq 6$  stabil.

### 12.6 Steifheit und Stabilität:

System von Dgln:

$$y' = f(x, y) \text{ mit AW } y(x_0) = \eta.$$

Fehler bei  $x^*$  statt  $y(x^*) = y^*$  wird  $\tilde{y}$  als Wert bei  $x^*$  genommen.

Als AWA  $z' = f(x, z)$ ,  $z(x^*) = \tilde{y}$

statt  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x^*) = y^*$ .

Instabilität (Fehlerverstärkung), wenn  $z$  und  $y$  trotz kleiner Fehler  $y^* - \tilde{y}$  start auseinander laufen.

In der Praxis Beschränkung auf AWA, wo die Lösungen  $y(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \infty$  erfüllen.

Es gilt:  $y'(x) - z'(x) = \left( \int_0^1 J_{ij}(x) dt \right)_{i,j=1}^n (y - z)$  mit  $J(x) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, z + t(y - z)) \right)_{i,j=1}^n$ .

„**Definition**“: Die Differentialgleichung  $y' = f(x,y)$  heißt steil in einer Rechtsumgebung  $[x_0, b]$  bzgl. zweier Lösungen  $y$  und  $z$ , wenn die Eigenwerte der Matrix  $J(x)$  folgende Eigenschaften besitzen:

- (i) Jeder EW  $\lambda_i$  besitzt negativen Realteil
- (ii) Es gibt sowohl EW mit großen als auch mit kleinen Betrag.

Jetzt:  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ ,  $|\lambda|$  groß d.h. steife Modellgleichung  
(Abklingende Lösung)

**Definition:** Für  $k$ -Schritt-Verfahren mit 1. charakteristischem Polynom  $\rho$  und 2. char. Polynom  $\sigma$  heißt

$$\chi(\xi, t) := \rho(\xi) - t \cdot \sigma(\xi) \quad (t = h\lambda)$$

das Stabilitätspolynom des Verfahrens.

Das Verfahren heißt absolut stabil für ein  $t \in \mathbb{C}$ , wenn alle Nullstellen von  $\chi(., t)$  einen Betrag kleiner als 1 haben.

(für  $t=0$  sind diese Verfahren nicht absolut stabil)

Die Menge

$$S = \{ t \in \mathbb{C} \mid \chi(\xi, t) = 0 \Rightarrow |\xi| < 1 \}$$

heißt Stabilitätsgebiet des Verfahrens.

*Entsprechendes beim Einschrittverfahren:*

Hat das Verfahren nach Anwendung auf Modellgleichung

$$y' = \lambda y$$

die Gestalt

$$y_{n+1} = g(h\lambda) y_n \quad (g \text{ Polynom in } h\lambda)$$

dann heißt  $\chi(., t)$  mit

$$\chi(\xi, t) = \xi - g(t)$$

das Stabilitätspolynom des Einschrittverfahrens,  $g$  die zugehörige Stabilitätsfunktion.

**Beispiel:** Euler explizit:  $S = \{ t \in \mathbb{C} \mid |1 - t| < 1 \}$

Euler implizit:  $S = \{ t \in \mathbb{C} \mid |1 - t| > 1 \}$

Trapezregel:  $S = \{ t \in \mathbb{C} \mid \left| \frac{2+t}{2-t} \right| < 1 \}$  (linker Halbraum)

Heun:  $S = \{ t \in \mathbb{C} \mid \left| 1 + t + \frac{1}{2}t^2 \right| < 1 \}$  („Ei“)

**Definition:** Ein Ein- oder Mehrschrittverfahren heißt A-stabil, wenn das Stabilitätsgebiet  $S$  die negative Halbebene  $H = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 0 \}$  enthält.

Es heißt  $A(\alpha)$ -stabil für  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , wenn  $S$  den Sektor

$$\{ t \in \mathbb{C} \mid |\arg(-t)| < \alpha \}$$

enthält.

Es heißt  $A(0)$ -stabil, wenn es  $A(\alpha)$ -stabil ist für ein  $\alpha > 0$  und

$A_0$ -stabil, wenn  $S$  die negative reelle Achse enthält.

**Bemerkung:** A-Stabilität ist eine starke Forderung!

Es gibt kein  $k$ -Schritt-Verfahren der Ordnung  $p > 2$ , das A-stabil ist.

(Beispiele:  $p=1$ : impliziter Euler,  $p=2$ : Trapezregel)

Betrachte  $R$ -stufiges RK-Verfahren angewandt auf Modellgleichung

$$t=h\lambda: \quad y_{n+1} = y_n \left( 1 + \underbrace{\sum_{i=1}^R c_i p_i(t)}_{P(t)} \right) \quad \text{grad}(P) \leq R \quad (\text{Rest siehe Skript})$$

Stabilitätspolynom

$$\chi(\xi, t) = \xi - P(t)$$

Stabilitätsgebiet

$$S = \{ t \in \mathbf{C} \mid |P(t)| < 1 \}$$

Wenn  $\text{grad}(P) \geq 1$ , dann gilt  $|P(t)| \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow \infty$ , d.h. das Stabilitätsgebiet ist beschränkt. Sei  $p$  die Konsistenzordnung des RK-Verfahrens.

$$\Rightarrow \quad P(t) = \sum_{j=0}^p \frac{1}{j!} t^j + \gamma_{p+1} t^{p+1} + \dots + \gamma_R t^R$$

**Satz 12.6.1:** Ein  $R$ -stufiges RK-Verfahren angewandt auf  $y' = \lambda y$  reduziert sich auf

$$y_{n+1} = P(t)y_n \quad (t=h\lambda)$$

mit  $P \in \mathbb{Q}_R$ .

Besitzt das Verfahren die (Konsistenz-)Ordnung  $p \geq 1$ , dann ist das Stabilitätsgebiet nicht leer, beschränkt und liegt lokal links vom Nullpunkt.

### 13. Randwertprobleme

$$y' = f(x, y), \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

$$y(a) = c_1 \in \mathbf{R}^n \quad a < b$$

$$y(b) = c_2 \in \mathbf{R}^n$$

#### 13.1 Lösbarkeit von RWP

System von DGLs  $y' = f(x, y)$

Randbedingungen

$$(*) \quad Ay(a) + By(b) = C \quad a, b \in \mathbf{R}, a < b, c \in \mathbf{R}^n, A, B \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

Oft sind Randbedingungen separiert

$$A_1 y(a) = c_1, \quad B_2 y(b) = c_2$$

dann

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \end{pmatrix} y(a) + \begin{pmatrix} 0 \\ B_2 \end{pmatrix} y(b) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

**Beispiel:**  $y'' + y = 0$  (Schwingungsgleichung)

$$y_1 = y, \quad y_2 = y' \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung:  $y = c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)$

Je nach Randbedingungen:

Existenz + Eindeutigkeit, nur Existenz oder keine Existenz

Eigenwertprobleme für DGLs

$$y' = f(x, y, \lambda)$$

Randbedingung:  $A(\lambda)y(a) + B(\lambda)y(b) = c(\lambda)$ ,  $A(\lambda), B(\lambda) \in \mathbf{R}^{(n+1) \times n}$ ,  $c(\lambda) \in \mathbf{R}^{n+1}$

$$\text{Hier:} \quad y_{n+1}(\lambda) \Rightarrow y'_{n+1} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \\ y'_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n, y_{n+1}) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n, y_{n+1}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A(\lambda) & \vec{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(a) \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B(\lambda) & \vec{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(b) \\ \lambda \end{pmatrix} = c(\lambda)$$

**Randwertprobleme mit freiem Rand**

Statt x neue Variable t

$$\begin{aligned} x-a &= t \cdot z_{n+1} & 0 \leq t \leq 1 & \Rightarrow & \text{fester Rand} \\ z_{n+1} &= b-a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(t) &= y(a + tz_{n+1}) \\ \dot{z}(t) &= y'(a + tz_{n+1}) \cdot z_{n+1} \\ \dot{z}_{n+1}(t) &= 0 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} z(t) \\ \dot{z}(t) \\ \dot{z}_{n+1}(t) \end{aligned}} \right\} \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \\ \dot{z}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{n+1} f_1(t, z_1, \dots, z_{n+1}) \\ \vdots \\ z_{n+1} f_n(t, z_1, \dots, z_{n+1}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Az(0) + Bz(1) = c$$

**13.2 Das einfache Schießverfahren:**

statt  $y'' = f(x, y, y')$   $y(a) = \alpha, y(b) = \beta$   
 jetzt: AWA  $y'' = f(x, y, y')$   $y(a) = \alpha, y'(a) = s$

AWA i. a. lösbar. Lösung sei  $y_s$  (hängt natürlich ab von s, d.h. „Richtung der Kanonenkugel“)

Finde s so, daß  $y_s(b) = \beta$  ist, d.h. finde NS der Funktion  $F(s) = y_s(b) - \beta$ .  
 Bestimmung einer Nullstelle von F mit z.B. Bisektions-, Sekanten- oder Newton-Verfahren (letzteres falls F' berechenbar!)

Newton:  $s_{i+1} = s_i - \frac{F(s_i)}{F'(s_i)}$  (dafür Iteration nötig)

$v := \frac{\partial y_s}{\partial s} = F'(s)$ , dann gilt:

$v'' = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') \cdot v + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y') \cdot v'$  mit  $v(a) = 0, v'(a) = 1$

ist eine AWA mit festen AW, also lösbar mit z.B. Runge Kutta. Damit erhält man also eine (gute) Annäherung an die gesuchte Ableitung F'!

Abhilfe: Statt  $F'(s_i)$  besser  $\Delta F(s_i) = \frac{F(s_i + \Delta s_i) - F(s_i)}{\Delta s_i}$  (Sekantenverfahren)

(einige Probleme ! siehe Skript!)

**allgemeines RWP**

(RWP)  $y' = f(x, y), A y(a) + B y(b) = c$  mit  $y = (y_1, \dots, y_n)^t$   
 (AWA)  $y' = f(x, y), y(a) = s$

Lösung der AWA sei  $y_s$ ,  $s := (\sigma_1, \dots, \sigma_n)^t$

$s$  ist Nullstelle von  $F(s) := As + By_s(b) = c \iff y_s$  ist Lösung des RWP

Funktionalmatrix von  $F$  ist

$$F'(s) = \left( \frac{\partial F_i}{\partial \sigma_i}(s) \right) = A + BZ_s(b) + 0 \quad \text{mit } Z_s(b) = \left( \frac{\partial y_s}{\partial \sigma_1}(b), \dots, \frac{\partial y_s}{\partial \sigma_n}(b) \right)^t$$

$\Rightarrow$  Newton Iteration

Man ersetzt am besten  $Z_s(b)$  durch

$$\Delta_j y_s(b) = \frac{y_{s+\Delta_j e_j}(b) - y_s(b)}{\Delta_j}, \quad \text{wo } s + \Delta_j e_j = (\sigma_1, \dots, \sigma_j + \Delta_j, \dots, \sigma_n)^t \text{ und}$$

$$\Delta y_s(b) = (\Delta_1 y_s(b), \dots, \Delta_n y_s(b)),$$

also  $\Delta F(s) = A + B \Delta y_s(b)$

**Algorithmus: (Schießverfahren mit Näherungsweise Newton)**

Eingabe: RWP  $y' = f(x,y)$        $Ay(a) + By(b) = c$

Startwert  $s$ , Genauigkeit  $\epsilon$ , obere Schranke für Iterationen  $N$

Ausgabe: Näherung  $y_s$  an Lösung oder Abbruch

Rechnung:  $i = 0$

(\*)  $y_s$  löse AWA  $y' = f(x,y)$ ,  $y_s(a) = s$

$$F(s) := As + By_s(b) - c$$

Wähle  $\Delta_j \neq 0$ ,  $j = 1, \dots, n$  und

$$y_{s+\Delta_j e_j} \text{ löst AWA } y' = f(x,y), \quad y_{s+\Delta_j e_j}(a) = s + \Delta_j e_j$$

$$\Delta_j y_s(b) = \frac{y_{s+\Delta_j e_j}(b) - y_s(b)}{\Delta_j}, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\Delta F(s) = A + B \Delta y_s(b) \text{ löse}$$

$$\Delta F(s) d = -F(s)$$

Wenn  $i < N$  und  $\|d\|_\infty < \epsilon$ , dann Sprung zu (\*) mit  $i := i+1$ ,  $s = s+d$ .

Sonst Abbruch.

**13.3 Ein Existenz- und Eindeutigkeitsatz für RWP**

**Satz 13.3.1:** Auf  $[a,b] \in \mathbb{R}^n$  gelte für  $f$

i)  $f$  ist stetig

ii)  $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$  ist stetig  $i, j = 1, \dots, n$

iii) die Funktionalmatrix  $J = \left( \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right)_{i,j=1}^n$  erfüllt  $\|J(x,y)\|_\infty \leq k(x) \quad \forall x \in [a,b]$

Für die Randbedingungen und für  $k$  gelte:

iv)  $A + B$  ist regulär

$$v) \int_a^b k(x) dx \leq \ln\left(1 + \frac{\lambda}{m}\right) \text{ für ein } \lambda \in ]0,1[ \text{ und } m := \|(A+B)^{-1}B\|_\infty.$$

Dann ist das RWP eindeutig lösbar!

(Bemerkung: Vermutlich ist die Aussage falsch, da ein Fehler im Beweis !)