Funktionalanalysis II - Kurzskript - SS 1999

Dozent: apl. Prof. Dr. Poppenberg
Autor: Ingo Manfraß

1. August 2004

Inhaltsverzeichnis

15 Reflexivität und schwache Topologie

Definition 15.1 Der normierte Raum E heißt *reflexiv*, wenn die kanonische Abbildung $J_E : E \to E''$ surjektiv ist.

Insbesondere ist jeder reflexive normierte Raum isometrisch isomorph zu seinem Bidualraum und somit auch vollständig. Die Umkehrung gilt nicht.

Bemerkung 15.2 Jeder Hilbertraum E ist reflexiv.

Satz 15.3 Es seien $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann ist die Abbildung

$$\Phi = l_q \to l_p' \ , \ (\Phi(y))(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \ , \ x = (x_n) \in l_p \ , \ y = (y_n) \in l_q$$

ein isometrischer Isomorphismus.

Bemerkung 15.4 (i) Es gelten die kanonischen Isomorphismen $l_1' \cong l_\infty$ und $c_0' \cong l_1$. Hingegen gilt aber $(l_\infty)' \ncong l_1$.

(ii) $l_p, 1 \leq p \leq \infty$ vollständig nach 15.3 und (i)

(iii) Für $1 < p < \infty$ ist l_p reflexiv. Hingegen sind aber c_0, c, l_1, l_∞ und auch $C[a, b]$ nicht reflexiv.

(iv) Ein normierter Raum E heißt *gleichmäßig konvex* (oder *uniform konvex*), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß $\forall x, y \in E$ mit $||x|| = ||y|| = 1$ und $||x - y|| \geq \varepsilon$ gilt $\frac{1}{2}||x + y|| \leq 1 - \delta$.
Jeder gleichmäßig konvexe Banachraum ist reflexiv.
Für $1 < p < \infty$ sind die Räume l_p und $L_p(A)$ gleichmäßig konvex.

(v) $L_q(A) \cong L_p(A)'$ falls $1 \leq p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Satz 15.5 Es sei E ein Banachraum.

(i) Ist E reflexiv und der Banachraum F isomorph zu E, so ist auch F reflexiv.

(ii) Ist E reflexiv und $F \subset E$ ein abgeschlossener Unterraum, so sind auch F und E/F reflexiv.

(iii) E ist reflexiv genau dann, wenn E' reflexiv ist.

Definition 15.6 Es sei E ein normierter Raum, und $M \subset E'$ trenne die Punkte von E, das heißt, zu $0 \neq x \in E$ gebe es ein $\phi \in M$ mit $\phi(x) \neq 0$. Dann bezeichne $\sigma(E, M)$ die gröbste Topologoe auf E, für die alle $\phi : E \to \mathbb{K}$, $\phi \in M$, stetig sind. Speziell nennt man $\sigma(E, E')$ die schwache Topologie von E, und bezeichnet $\sigma(E', E) := \sigma(E', J_E(E))$ als die schwach-$*$-Topologie von E'.

Bemerkung 15.7 (i) Eine Menge $U \subset E$ ist offen bzgl. $\sigma(E, M)$ genau dann, wenn U Vereinigung von Mengen der Form $V = \bigcap_{i=1}^{m} \phi_i^{-1}(V_i)$ mit $\phi_i \in M$ und V_i offen in $\mathbb{K}$ ist. Jede $\sigma(E, M)$-Umgebung von $x \in E$ enthält eine Menge

$$U_{\varepsilon,\phi_1,\ldots,\phi_n}(x) = \{y \in E \mid |\phi_i(y-x)| < \varepsilon, i = 1, \ldots, n\} \ , \ \varepsilon > 0, \phi_1, \ldots, \phi_n \in M.$$

Man nennt das Sytem der Mengen $U_{\varepsilon,\phi_1,\ldots,\phi_n}(x)$ eine *Umgebungsbasis* zu $x \in E$. Es gilt $U_{\varepsilon,\phi_1,\ldots,\phi_n}(x) = x + U_{\varepsilon,\phi_1,\ldots,\phi_n}(0)$, und $U_{\varepsilon,\phi_1,\ldots,\phi_n}(0)$ ist absolutkonvex.
Wegen der Voraussetzung an M ist $\sigma(E, M)$ Hausdorffsch; i.a. ist aber $\sigma(E, M)$ nicht metrisierbar.

(ii) Die schwach-$*$-Topologie auf E' ist gröber als die schwache Topologie; ist E reflexiv, so stimmen schwache und schwach-$*$-Topologie auf E' überein.

(iii) Eine Folge $(x_n) \subset E$ konvergiert genau dann schwach gegen $x \in E$, wenn $\lim_{n\to\infty} \phi(x_n) = \phi(x) \forall \phi \in E'$ gilt. Eine Folge $(\phi_n) \subset E'$ konvergiert genau dann schwach-$*$ gegen $\phi \in E'$, wenn $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \phi(x) \forall x \in E$ gilt.

(iv) Jede in der Norm konvergente Folge konvergiert auch schwach bzw. schwach-$*$. Die Umkehrung gilt nicht.

(v) $L_q(A) \cong L_p(A)'$ falls $1 \le p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(vi) Sind E, F normierte Räume und A $\in$ L(E,F), so sind A: $(E, \sigma(E, E')) \to (F, \sigma(F, F'))$ und $A' : (F', \sigma(F', F)) \to (E', \sigma(E', E))$ stetig (vgl. Übung).

(vii) Sind E, M wie in 15.6, so gilt der Trennungssatz 14.13 für konvexe Mengen mit demgleichen Beweis auch für $(E, \sigma(E, M))$; d.h. etwa im Fall (i): ist A σ(E,M)-offen, so gibt es ein $\sigma(E, M)$-stetiges lineares Funktional ϕ mit den Abschätzungen aus 14.13 (i), ebenso (ii), (iii), (iv).

(viii) Es sei X = $\prod_{i\in I} X_i$ das kartesische Produkt der topologischen Hausdorffräume X_i. Dann ist die Produkt *Produkttopologie* auf X die gröbste Topologie auf X, für die alle Projektionen $p_i : X \to X_i, p_i((x_j)_{i\in I})$ stetig sind. Nach dem Satz von Tychonoff aus der Topologie ist X kompakt genau dann, wenn X_i kompakt ist für jedes i $\in$ I.

Satz 15.8 (Banach - Alaogulu). E normierter Raum und B = $\{x \in E : \|x\| \le 1\}$. Dann ist B := $\{\phi \in E' : \|\phi\| < 1\} schwach{-}*{-}kompakt(\sigma$ (E',E) - kompakt

Lemma 15.9 z : E' $\to \mathbb{K}$ linear, schwach-*-stetig $\Rightarrow z \in J_E(E)$.

Lemma 15.10 E normierter Raum B = $\{x \in E : \|x\| < 1\}$. Dann ist $J_E(B)$ in C:= $\{z \in E'' : \|z\| < 1\}$schwach-*-dicht.

Satz 15.11 Ein Banachraum E ist reflexiv genau dann, wenn B = $\{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ schwach-folgenkompakt. In diesem Fall ist B auch schwach folgenkompakt (d.h. jede Folge in B hat eine schwach konvergente Teilfolge)

Folgerung 15.12 Der Banachraum E ist reflexiv $\Longleftrightarrow \sigma(E', E'') = \sigma(E', E)$

Satz 15.13 Ist A ⊂E konvex und abgeschlossen, so ist A auch schwach abgeschlossen

Satz 15.14 Seien E, F normierte Räume. F vollständig und A ∈ L(E,F).

(i) Ist A kompakt, so bildet A schwach konvergente Folgen in (norm-) konvergente Folgen ab.

(ii) Ist E reflexiv und bildet A schwach konvergente Folgen in (norm-) konvergente Folgen ab, so ist A kompakt.

Bemerkung 15.15 15.14 (ii) gilt i.a. nicht ohne die Voraussetzung 'reflexiv'.

16 Der Dualraum von C[a,b]

Definition 16.1 g: [a,b] → $\mathbb{K}$ heißt *von beschränkter Variation*, wenn V(g) := $\sup\{\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| : a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\} < \infty$ Man schreibt g ∈ BV[a,b]. V(g)(*Totalvariation* von g auf [a,b]. Gilt zusätzlich g(a) = 0 und g rechtseitig stetig in (a,b), so schreibt man g ∈ BV*[a,b].

Bemerkung 16.2 (i) BV[a,b] ist VR und V: BV[a,b] → $R^{\geq 0}$,g $\mapsto V(g)$ ist eine Halbnorm auf BV[a,b].

(ii) Für g ∈ $BV[a,b]$ ist $g|_{[a,c]} \in BV[a,c], a < c < b$. $g|_{[a,c]} \in BV[c,b]$ und es gilt: $V(g|_{[a,b]}) = V(g|_{[a,c]}) + V(g|_{[c,b]})$.

(iii) Jede monotone Funktion ist in BV[a,b].

(iv) Für ∈ $BV[a,b]$ ist $g_+(t) = V(g|_{[a,b]})$ monoton wachsend K = R. Im Fall K = C sind mit g auch Re g und Im g in $BV[a,b]$.

(v) Jedes $g \in BV[a,b]$ ist Linearkombination monotoner Funktionen. Daher hat jedes $g \in BV[a,b]$ höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen und ist Regelfunktion, d.h. liner und rechter Grenzwert existieren.

Satz 16.3 $g \in BV[a,b]$ und $f \in$ C[a,b]. Für jede Folge von Zerlegungen $a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < ... < t_{k_n}^{(n)} = b$ und $t_{i-1}^{(n)} \leq \xi_i^{(n)} \leq t_i^n$ $\Delta_n := max\{t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)} : 1 \leq i \leq k_n\}$ mit $\Delta \to 0$ existiert der Grenzwert $\int_a^b f dg = \int_a^b f(t) dg(t) =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)}) \cdot (g(t_i^{(n)}) - g(t_{i-1}^{(n)})$. Der Limes ist unabhängig von der Wahl der Daten $t_i^n, \xi_i^{(n)}$ und heißt das *(Riemann-) Stieltjes* Integral von f bzgl g.

Im Fall g(t) = t ist $\int_a^b f dg$ das Riemann-Integral von f

Lemma 16.4 Es sei $g \in BV[a,b]$. Dann sind äquivalent:

(i) $\int_a^b f dg = 0$ für alle f ∈ C[a,b]

(ii) Es gilt: g(a) = g(b) und bis auf höchstens abzählbar viele Punkte ist konstant gleich g(a).

Lemma 16.5 Zu jedem $g \in BV[a,b]$ gibt es ein $g^* \in BV[a,b]$ mit $V(g^*) \leq V(g)$ und $\int\limits_a^b f\,dg = \int\limits_a^b f\,dg^* \quad \forall\, f \in C[a,b]$.

Satz 16.6 (F. Riesz). Die Abbildung

$$\Gamma : (BV^*[a,b], V) \to (C[a,b])' \,,\; (\Gamma(g))(f) := \int\limits_a^b f\,dg \,,\; g \in BV^*[a,b] \,,\; f \in C[a,b]$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

Bemerkung 16.7 (i) Wegen 16.6 ist $(BV^*[a,b], V)$ Banachraum.

(ii) Ausgehend vom Riemann-Stieltjes Integral $\int\limits_a^b f\,dg$ kann man für $g \in BV[a,b]$ auch ein Lebesgue-Stieltjes Integral für eine größere Klasse von Funktionen f einführen, das das gewöhnliche Lebesgue-Integral als Spezialfall $g(t) = t$ enthält.

(iii) In Verallgemeinerung von 16.6 kann man den folgenden Satz von Riesz zeigen: Ist K ein kompakter Hausdorffraum, so gibt es zu jedem $\phi \in (C(K))'$ genau ein reguläres komplexes Borel-Maß λ auf K mit

$$\phi(f) = \int\limits_K f(t)\,d\lambda(t) \,,\; f \in C(K).$$

Es ist dabei $\|\phi\| = |\lambda|(K)$ die Totalvariation von λ (vgl. [Rul], 6.19.).

III. Banachalgebren und Spektraltheorie beschränkter Operatoren

17 Banachalgebren

Die Banachräume $L(E), E$ Banachraum, oder $C(K), K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt, tragen auch multiplikative Strukturen. Dies führt zu dem folgenden Begriff der Banachalgebra. Wir nehmen dabei im folgenden stets $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ an.

Definition 17.1 Ein komplexer Banachraum $\mathfrak{A}$ versehen mit einer Multiplikation $'\cdot' : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, heißt *Banachalgebra*, wenn $(\mathfrak{A}, +, \cdot)$ eine *Algebra* ist, das heißt, wenn ($\mathfrak{A}$ Vektorraum ist und) $\forall\, x, y, z \in \mathfrak{A}$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$x(yz) = (xy)z, x(y+z) = xy+xz, (x+y)z = xz+yz, \alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y),$$

und wenn $\forall\, x, y \in \mathfrak{A}$ gilt

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$

Hat $\mathfrak{A}$ ein Einselement e, so fordert man zusätzlich $\|e\| = 1$. Die Algebra $\mathfrak{A}$ heißt *kommutativ*, wenn stets $xy = yx$ gilt.

Die Multiplikation in einer Banachalgebra ist stets stetig

Beispiel 17.2 (i) Ist E ein komplexer Banachraum, so ist $L(E)$ mit der Komposition als Multiplikation eine Banachalgebra mit Eins. $L(E)$ ist i.a. nicht kommutativ. Auch $K(E)$ ist Banachalgebra, hat aber im Fall $\dim(E) = \infty$ kein Einselement.

(ii) Ist $K \neq \emptyset$ ein kompakter Hausdorffraum, so ist $C(K, \mathbb{C})$ mit der punktweisen Multiplikation eine kommutative Banachalgebra mit Eins bzgl. der Supremumsnorm.

(iii) Es sei $D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$. Dann ist die *Disk-Algebra*

$$\mathfrak{A}(D) := \{f \in C(\bar{D}) \,|\, f_{|D} \text{ ist holomorph}\}$$

nach einem Satz von Weierstraß abgeschlossene Unteralgebra von $C(D, \mathbb{C})$, und somit Banachalgebra mit Eins.

(iv) $l_1(\mathbb{Z})$ ist mit der Faltung $x * y := \left(\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k} y_k\right)_{n=-\infty}^{\infty}$ als Multiplikation eine kommutative Banachalgebra mit dem Einselement $e_0 = (\delta_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$.

(v) Auch $L_1(\mathbb{R}^N)$ ist mit der Faltung $(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,dy$ kommutative Banachalgebra, die jedoch kein Einselement besitzt.

Ein Element x einer Banachalgebra $\mathfrak{A}$ mit Eins e heißt invertierbar, wenn es $y \in \mathfrak{A}$ gibt, mit $xy = yx = e$; y ist eindeutig bestimmt, um man schreibt $x^{-1} := y$. Gilt $xy = zx = e$, so folgt $z = y$. Man bezeichnet $\mathfrak{G}(\mathfrak{A}) := \{x \in \mathfrak{A}$ x ist invertierbar $\}$ als die Gruppe der *Gruppe der invertierbaren Elemente von* $\mathfrak{A}$, denn für $x, y \in \mathfrak{G}(\mathfrak{A})$ ist $xy \in \mathfrak{G}(\mathfrak{A})$, denn $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

Lemma 17.3 (Neumannsche Reihe). Es seien $\mathfrak{A}$ eine Banachalgebra mit Eins e und x $\in \mathfrak{A}$ mit $\|x\|$ <1. Dann ist e - x invertierbar, und es gelten

$$\|(e-x)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|x\|}, \|e-(e-x)^{-1}\| \leq \frac{\|x\|}{1-\|x\|}$$

Satz 17.4 Es sei $\mathfrak{A}$ eine Banachalgebra mit Eins e. Dann ist $\mathfrak{G}(\mathfrak{A})$ offen in $\mathfrak{A}$, und die Inversion x $\mapsto x^{-1}$ ist stetig auf $\mathfrak{A}$.

Wir erklären nun die wichtigsten Begriffe der Spektraltheorie. Es seien im folgenden $\mathfrak{A}$ eine Banachalgebra mit Eins e.

Definition 17.5 Für x $\in \mathfrak{A}$ heißt

$$\rho := \{z \in \mathbb{C} : ze - x \in \mathfrak{G}(\mathfrak{A})\}$$

die *Reolventenmenge* von x. Die Funktion $R_x : \rho(x) \to \mathfrak{A}$, $R_x(x) := (ze-x)^{-1}$ heißt die *Resolvente* von x. Die Menge $\sigma(x) := \mathbb{C}\ \sigma(x)$ heißt das *Spektrum* von x. Man bezeichnet $r(x) := sup\{|z| : z \in \sigma(x)\}$ als den Spektralradius von x.

Beispiel 17.6 (i) Ist f $\in \mathfrak{A} = C(X)$, X kompakter Hausdorffraum, so gilt

$$\sigma(f) = f(X).$$

(ii) Ist A $\in \mathfrak{A}$=L(E), E ein Banachraum, so gilt:

$$\sigma(A) = \{z \in \mathbb{C} : zI - A \text{ ist nicht bijektiv}\}$$

nach dem Isomophiesatz von Banach. Folglich gilt stets $\sigma_p(A) \subseteq \sigma(A)$. Im Fall dim(E) $< \infty$ gilt sogar stets $\sigma_p(A) = \sigma(A)$. Ist E Hilbertraum und A $\in K(E)$ selbstadjungiert, so gilt $\sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A) \setminus \{0\}$

(iii) Der Rechtsshift R $\in$ L(l_2) ist injetkiv, aber nicht surjetkiv, also gilt $0 \in \sigma(R) \setminus \sigma_p(R)$.

(iv) Für den Volterra-Integraloperator V $\in L(L_2[0,1])$ gilt $\sigma_p(V) = \emptyset$, aber $0 = \sigma(V)$.

(v) Für A = $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{K}^2)$ gilt $\sigma(A) = \{i, -i\}$ im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ würde man jedoch $\sigma(A) = \emptyset$ erhalten.

Das letzte Beispiel zeigt, daß es sinnvoll ist, sich auf den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ zu beschränken.

Bemerkung 17.7 Da z $\mapsto$ ze - x stetig ist, ist $\rho(x)$ für $x \in \mathfrak{A}$ stets offen. $\sigma(x)$ ist abgeschlossen, und $R_x : \rho(x) \to \mathfrak{A}$ ist stetig. Für z $\in \mathbb{C}$ mit $|z| > \|x\|$ gilt z $\in \rho(x)$. Also gilt $\rho(x) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|x\|\}$, und $\sigma(x)$ ist kompakt mit $r(x) \leq \|x\| < \infty$. Ferner gilt $\|R_x(z)\| \leq \frac{1}{|z|-\|x\|}$, $|z| > \|x\|$.

Lemma 17.8 Für $x \in \mathfrak{A}$ und $\lambda, \mu \in \rho(x)$ gelten

(i) $R_x(\lambda) - R_x(\mu) = -(\lambda - \mu)R_x(\lambda)r_x(\mu)$ (*Resolventengleichung*).

(ii) $\lim\limits_{\lambda \to \mu} \frac{R_x(\lambda)-R_x(\mu)}{\lambda-\mu} = -R_x(\mu)^2$.

Satz 17.9 Für jedes $x \in \mathfrak{A}$ ist das Spektrum $\sigma(x)$ kompakt und nicht leer.

Folgerung 17.10 (Gelfand-Mazur). Ist $\mathfrak{A}$ eine Banachalgebra mit Eins e, die ein Schiefkörper ist, d.h., für die $\mathfrak{G}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \setminus \{0\}$ gilt, so ist $\mathfrak{A} = \mathbb{C}e$

Man beachte, daß im folgenden Satz $r(x)$ nur von der algebraischen Struktur von $\mathfrak{A}$, der Limes $\lim\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$ aber von der Norm abhängt.

Satz 17.11 Für jedes $x \in \mathfrak{A}$ gilt

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \qquad \text{(Spektralradiusformel).}$$

Es wird nun wieder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ zugelassen.

Satz 17.12 (Stone-Weierstraß) Es sei X ein kompakter Hausdorff-Raum und $\mathfrak{A}$ eine Unteralgebra von $C(X, \mathbb{K})$, die die konstanten Funktionen enthält und die Punkte von X trennt (d.h. zu $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gibt es $\phi \in \mathfrak{A}$ mit $\phi(x) \neq \phi(x)$) sowie im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ mit f auch $\bar{f}$ enthält.
Dann ist $\mathfrak{A}$ dicht in $C(X, \mathbb{K})$.

Folgerung 17.13 (Approximationssatz von Weierstraß). Es sei $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^N$ kompakt. Dann ist

$$\{\, f \in C(X) \,|\, f(x) = \sum_{\textit{endlich}} a_{k_1 \ldots k_N} x_1^{k_1} \ldots x_N^{k_N}, a_{k_1 \ldots k_N} \in \mathbb{K} \,\}$$

dicht in $C(X)$.

18 Kommutative Banachalgebren

Es sei im folgenden $\mathfrak{A}$ eine Banachalgebra mit Eins e.

Definition 18.1 Ein lineares Funktional $0 \neq \phi : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ heißt *multiplikativ*, wenn $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \;\forall\, x, y \in \mathfrak{A}$ gilt. Es bezeichne $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ die Menge aller multiplikativen nichttrivialen Funktionale auf $\mathfrak{A}$.

Bemerkung 18.2 Jedes $\phi \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ ist stetig und erfüllt $\|\phi\| = \phi(e) = 1$.

Satz 18.3 $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ ist kompakter topologischer Raum versehen mit der schwach-*-Topologie.

Definition 18.4 Sei $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}) \neq \emptyset$. Die Abbildung

$$\Gamma : \mathfrak{A} \to C(\mathfrak{M}(\mathfrak{A})),\; \Gamma(x)(\phi) = \phi(x)$$

heißt *Gelfand-Transformation*.

Bemerkung 18.5 Ist $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}) \neq \emptyset$, so ist die Abbildung Γ linear, definiert, multiplikativ und $\|\Gamma x\|_\infty \leq \|x\|$.

Bemerkung $\mathfrak{A} = L(\mathbb{C}^N) \to \mathfrak{M}(\mathfrak{A}) = \emptyset$ falls $N \geq 2$.

Definition 18.6 Ein linearer Unterraum I $\subset \mathfrak{A}$ mit $I \neq \mathfrak{A}$ heßt *Ideal* in $\mathfrak{A}$, wenn für jedes x $\in \mathfrak{A}$ gilt: $xI \subset I$ und $Ix \subset I$. Ein maximales Ideal ist ein Ideal, daß in keinem echt größerem Ideal enthalten ist. Gilt $\mathfrak{A}I \subset I(I\mathfrak{A} \subset I)$, dann heißt I Linksideal (Rechtsideal).

Beispiel 18.7 (i) C(X), K kompakter Haussdorffraum, sei t $\in$ K. I(t) $= \{f \in C(K) : f(t) = 0\}$ maximales Ideal in C(K).

(ii) E Banachraum, F UVR, F $\subset$ E, $\{0\} \neq F \neq E$ $\{A \in L(E), A|_F = 0\}$, $B \in L(E)$ ist Linksideal und $\{A \in L(E), R(A) \subseteq F\}$ ist Rechtsideal. $K(E) \subseteq L(E), dim(E) = \infty \Rightarrow$ K(E) abgeschlossenes Ideal in L(E).

Lemma 18.8 $\mathfrak{A}$ Banachalgebra mit Eins e.

(i) $x \in \mathfrak{A}$ hat genau dann ein Linksinverses (bzw. Rechtsinverses), wenn x in keinem Linksideal (bzw. Rechtsidesl) liegt. // Ist $\mathfrak{A}$ kommutativ, so ist $x \in \mathfrak{A}$ genau dann invertierbar, wenn x in keinem Ideal liegt.

(ii) Für jedes abgeschlossene Ideal $I \subset \mathfrak{A}$ ist der Quotient $\mathfrak{A} \setminus I$ Banachalgera mit Eins mit der Multiplikation

$$(x + I)(y + I) = (xy + I)\; x, y \in \mathfrak{A}$$

Ist $\mathfrak{A}$ kommutativ, so auch $\mathfrak{A} \setminus I$.

(iii) Mit I ist auch $\overline{I}$ Ideal in $\mathfrak{A}$. Folglich sind maximale Ideale stets abgeschlossen.

(iv) Jedes Ideal I in $\mathfrak{A}$ ist in einem maximalen Ideal I_0 enthalten.

Ab jetzt: $\mathfrak{A}$ sei kommutative Banachalgebra mit Eins e. $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ heißt dann auch *Raum der maximalen Ideale*, denn

Satz 18.9 Sei $\mathfrak{A}$ kommutative Banachalgebra mit Eins e. Dann $I \subset \mathfrak{A}$ genau dann ein maximales Ideal in $\mathfrak{A}$, wenn es ein $\phi \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ gibt, mit $I = N(\phi)$. In diesem Fall ist ϕ durch I eindeutig bestimmt.

Satz 18.10 Es sei $\mathfrak{A}$ eine kommutative Banachalgebra mit Eins e. Dann ist $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}) \neq \emptyset$, und die Gelfand-Transformation $\Gamma : \mathfrak{A} \to C(\mathfrak{M}(\mathfrak{A}))$ hat die folgenden Eigenschaften:

(i) $x \in \mathfrak{A}$ invertierbar $\Leftrightarrow$ Γx hat keine Nullstelle auf $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$.

(ii) Für $x \in \mathfrak{A}$ gilt $\{\, (\Gamma x)(\phi) \,|\, \phi \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A})\} = \sigma(x)$.

(iii) Für $x \in \mathfrak{A}$ gilt $\|\Gamma x\|_\infty = r(x)$.

(iv) $N(\Gamma) = \{\, x \in \mathfrak{A} \,|\, r(x) = 0 \,\} = \bigcap\limits_{\phi \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A})} N(\phi) =: \mathrm{rad}(\mathfrak{A})$.
Der Durchschnitt $\mathrm{rad}(\mathfrak{A})$ aller maximaler Ideale von $\mathfrak{A}$ heißt *Radikal von* $\mathfrak{A}$.

(v) Γ ist injektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rad}(\mathfrak{A}) = 0$. $\mathfrak{A}$ heißt dann *halbeinfach*.

(vi) Γ ist isometrisch $\Leftrightarrow$ $\|x^2\| = \|x\|^2 \;\; \forall x \in \mathfrak{A}$.

(vii) $\Gamma\mathfrak{A}$ trennt die Punkte von $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$, das heißt, zu $\phi, \psi \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ mit $\phi \neq \psi$ gibt es ein $x \in \mathfrak{A}$ mit $\Gamma x(\phi) \neq \Gamma x(\psi)$.

Beispiel 18.11 Es sei K ein kompakter Hausdorffraum und $\mathfrak{A} = C(K)$. Für jedes $t \in K$ ist dann $\delta_t \in \mathfrak{M}(C(K))\,,\ \delta_t(f) = f(t)$.
Die Abbildung $\delta : K \to \mathfrak{M}(C(K))\,,\ \delta(t) = \delta_t$ ist ein Homöomorphismus.

Für die Gelfand-Transformierte von $f \in C(K)$ gilt nun $(\Gamma f)(\delta_t) = \delta_t(f) = f(t)$, das heißt, Γ ist nach Identifizierung $K \approx \mathfrak{A}(C(K))$ die Identität, das heißt, es gilt $(\Gamma f) \circ \delta = f\,,\ f \in C(K)$.

Beispiel 18.12 Für die Banachalgebra $l_1(\mathbb{Z})$ mit der Faltungsmultiplikation aus 17.2(iv) gilt die Homöomorphie $\mathfrak{M}(l_1(\mathbb{Z})) \approx S^1 := \{\, z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1 \,\}$.

Für die Gelfand-Transformation $\Gamma : l_1(\mathbb{Z}) \to C(\mathfrak{M}(l_1(\mathbb{Z})))$ gilt für $z \in S^1$ und $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l_1(\mathbb{Z})$ die Beziehung

$$(\Gamma x \circ \delta^{-1})(z) = \sum_k x_k z^k.$$

Schreibt man $z = e^{it}$ für $z \in S^1$, so ist folglich $\Gamma(l_1(\mathbb{Z}))$ vermöge der Identifizierung $\mathfrak{M}(l_1(\mathbb{Z})) \approx S^1$ die Algebra der *absolut konvergenten Fourierreihen*

$$\begin{aligned} W(S^1) &= \{ f \in C(S^1) \,|\, f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k z^k \,,\ \sum_k |x_k| < \infty \} \\ &= \{ f \in C_{2\pi}[0, 2\pi] \,|\, f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k e^{ikt} \,,\ \sum_k |x_k| < \infty \} \end{aligned}$$

Die Gelfand-Transformation Γ ist injektiv, aber nicht surjektiv. Da $W(S^1)$ die trigonometrischen Polynome enthält und Γ somit dichtes Bild hat, kann Γ folglich nicht isometrisch sein.

Die Algebra $W(S^1)$ wird die *Wiener-Algebra* genannt.

Satz 18.13 Es sei $f(e^{it}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k e^{ikt}$ mit $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_k| < \infty$. Ist dann $f(e^{it}) \neq 0$ für alle $e^{it} \in S^1$, so gilt: $\frac{1}{f(e^{it})} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} y_k e^{ikt}$ mit $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |y_k| < \infty$.

19 C*-Algebren

Definition 19.1 Eine (komplexe) Banachalgebra $\mathfrak{A}$ mit einer Abbildung $* : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, $x \mapsto x*$ heißt **-Algebra*, wenn * eine *Involution* ist, d.h. für alle x, y$\in \mathfrak{A}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt: $(x^*)^* = x, (x+y)^* = x^* + y^*, (xy)^* = y^* x^*, (\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$. Eine *-Algebra heißt *C*-Algebra*, wenn für alle $x, y \in \mathfrak{A}$ gilt: $\|x^* x\| = \|x\|^2$.

Beispiel 19.2 (i) $\mathbb{C}$ ist C*-Algebra mit $z* = \overline{z}, z \in \mathbb{C}$.

(ii) Ist H ein Hilbertraum, so ist L(H) mit $A \mapsto A*$ C*-Algebra.

(iii) K kompakter Hausdorffraum. Dann ist C(K) mit $f \mapsto \overline{f}$ eine C*-Algebra (kommutativ).

(iv) Für eine Menge M $\neq \emptyset$ist $l_\infty(M)$ mit $f \mapsto \overline{f}$ C*-Algebra.

(v) Die Banachalgebra $L_1(\mathbb{R}^N)$aus 17.2(v) ist mit der Involution $f \mapsto \overline{f}$ eine $*$-Algebra, aber keine C*-Algebra.

Bemerkung 19.3 Ist $\mathfrak{A}$ eine C*-Algebra, so gilt: $\|x^*\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathfrak{A}$. Besitzt $\mathfrak{A}$ eine Eins e, so gilt $e^* = e$, und für $x \in \mathfrak{G}(\mathfrak{A})$ ist auch $x^* \in \mathfrak{G}(\mathfrak{A})$ mit $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$.

Definition 19.4 Ein Element x einer C*-Algebra $\mathfrak{A}$ heißt *selbstadjungiert*, wenn $x = x^*$, *normal*, wenn $xx^* = x^* x$, *unitär*, wenn $x \in \mathfrak{G}(\mathfrak{A})$ und $x^* = x^{-1}$.

Bemerkung Selbstadjungierte und unitäre Elemente sind normal.

Lemma 19.5 Es sei $\mathfrak{A}$ eine C*-Algebra mit Eins, $\phi \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ und $x \in \mathfrak{A}$. Dann gelten:

(i) x selbstadjungiert $\Rightarrow \phi(x) \in \mathbb{R}$

(ii) $\phi(x^*) = \overline{\phi(x)}$

(iii) $\phi(x^*x) \geq 0$

(iv) x unitär $\Rightarrow |\phi(x)| = 1$.

Definition 19.6 Eine lineare Abbildung $\Phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ zwischen kommutativen Banachalgebren mit Eins heißt *(Algebren-)Homomorphismus*, wenn $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y), x, y \in \mathfrak{A}$ und $\Phi(e_{\mathfrak{A}}) = e_{\mathfrak{B}}$. Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ C*-Algebren und gilt zusätzlich $\Phi(x^*) = \Phi(x)^*$ für alle $x \in \mathfrak{A}$, so heißt Φ ein **-Homomorphismus.*

Satz 19.7 *Gelfand - Neumark* Sei $\mathfrak{A}$ kommutative C*-Algebra mit Eins. Dann ist die Gelfand-Transformation $\Gamma : \mathfrak{A} \to C((M(A))$ ein isometrischer und bijektiver *-Homomorphismus.

Bemerkung C(K) K kompakter Hausdorff Raum ist bis auf *-Isometrie die einzige kommuative C*-Algebra.

Sei $\mathfrak{A}$ eine C*-Algebra mit Eins e. Sei $x \in \mathfrak{A}$ normal, so bezeichne $\mathfrak{P}$(x,x*,e) die Algbra der Polynome in den (kommutierenden) Variablen x, x*, e. Dann $C^*(x) := \overline{\mathfrak{P}(x, x^*, e)} \subseteq \mathfrak{A}$ eine komutative C*-Algebra mit Eins e. C*(x) ist die kleinste abgeschlossene C*-Unteralgebra von $\mathfrak{A}$, die x und e enthält.

Lemma 19.8 Sei $\mathfrak{A}$ C*-Algebra mit Eins, $x \in \mathfrak{A}$ normal und $\mathfrak{B} =$ C*(x). Dann

(i) $\Gamma x : \mathfrak{B} \to \sigma_{\mathfrak{B}}(x)$ Homöomorphismus.

(ii) $\sigma_{\mathfrak{A}} \subseteq \sigma_{\mathfrak{B}}$.

Folgerung 19.9 Es sei $\mathfrak{A}$ eine C*-Algebra mit Eins, $\mathfrak{B}$ eine abgeschlossene C*-Unteralgebra mit Eins, und $x \in \mathfrak{B}$. Dann gilt $\sigma_{\mathfrak{B}}(x) = \sigma_{\mathfrak{A}}(x)$.

Satz 19.10 Es sei $\mathfrak{A}$ eine C*-Algebra mit Eins und $x \in \mathfrak{A}$ normal. Dann gibt es genau einen $* -$ Homomorphismus $\Phi_x : C(\sigma(x)) \to \mathfrak{A}$ mit $\Phi_x(z) = x$ (wobei $z : \sigma(a) \to \mathbb{C}$ die identische Abbildung ist). Φ_x ist Isometrie und $R(\Phi_x) = C^*(x)$.

Definition 19.11 In der Situation von 19.10 nennt man $\Phi_x : C(\sigma(x)) \to \mathfrak{A}$ den *stetigen Funktionalkalkül* des normalen Elementes $x \in \mathfrak{A}$, und schreibt $f(x) := \Phi_x(f)$ für $f \in C(\sigma(x))$.

Folgerung 19.12 (Spektralabbildungssatz). Es sei $\mathfrak{A}$ eine C*-Algebra mit Eins und $x \in \mathfrak{A}$ normal. Dann gilt $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$.

Folgerung 19.13 Es sei $\mathfrak{A}$ eine C*-Algebra mit Eins und $x \in \mathfrak{A}$ normal. Dann gelten:

(i) x ist selbstadjungiert $\Leftrightarrow \sigma(x) \subset \mathbb{R}$

(ii) x ist selbstadjungiert $\Rightarrow \exp(ix)$ unitär

(iii) x ist unitär $\Rightarrow \sigma(x) \subset \{ z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1 \}$

Wir behandeln nun Anwendungen auf positive Elemente in C*-Algebren.

Folgerung 19.14 Für eine C*-Algebra $\mathfrak{A}$ mit Eins und $x \in \mathfrak{A}$ sind äquivalent:

(i) x ist positiv, in Zeichen $x \geq 0$, das heißt $x = x^*$ und $\sigma(x) \subset \mathbb{R}_+$.

(ii) Es gibt $y = y^* \in \mathfrak{A}$ mit $y^2 = x$.

(iii) $x = x^*$ und $\|te - x\| \leq t$ für ein (und damit für alle) $t \geq \|x\|$.

Weiter ist $\mathfrak{A}_+ := \{ x \in \mathfrak{A} \,|\, x \geq 0 \}$ ein abgeschlossener Kegel, das heißt, $\mathfrak{A}_+$ ist abgeschlossen und für $x_1, x_2 \in \mathfrak{A}_+$ und $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0$ ist auch $x_1 + x_2 \in \mathfrak{A}_+$ und $\lambda x_1 \in \mathfrak{A}_+$.

Ab jetzt: $L(H), H$ Hilbertraum

Folgerung 19.15 Für einen komplexen Hilbertraum H und $A \in L(H)$ gilt $A \geq 0$ genau dann, wenn $\langle Ax, x \rangle \geq 0 \ \forall x \in H$. Für $A, B \in L(H)$ mit $A, B \geq 0$ ist auch $A + B \geq 0$, und im Fall $AB = BA$ gilt auch $AB \geq 0$.

Lemma 19.16 Ist $A \in L(H)$ mit $A \geq 0$, so gilt für alle $x, y \in H$

$$|\langle Ax, y \rangle|^2 \leq \langle Ax, x \rangle \langle Ay, y \rangle \quad , \quad \|Ax\|^2 \leq \|A\| \langle Ax, x \rangle.$$

Satz 19.17 (*Monotone Konvergenz*). Es sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in L(H), $A_n = A_n^*$ mit $A_n \leq A_{n+1}$, (d.h. $A_{n+1} - A_n \geq 0$) und $A_n \leq B - B^* \in L(H)$. Dann existiert der Limes $Ax := \lim\limits_{n \to \infty} A_n x$, $x \in H$ und definiert $A \in L(H)$ und $A = A^*$ und $A_n \leq A \leq B$ für alle n. Gilt zusätzlich $A_n^2 = A_n$ (orthogonale Proj.), so gilt auch $A^2 = A$.

20 Der Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren

Definition 20.1 Eine Abbildung E: $\mathbb{R} \to L(H)$, $\lambda \mapsto E(\lambda) \in L(H)$ heißt *Spektralschar*, wenn folgendes gilt:

(i) E_λ orthogonale Projektion in H für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$

(ii) $E_\lambda \leq E_{mu}$, also $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E\lambda$ für $\lambda < \mu$ *Monotonie*

(iii) $E_{\lambda+0} := \lim\limits_{\mu\to\lambda^+} E_\mu x = E_\lambda x$ für $x \in H, \lambda \in \mathbb{R}$, *rechtsseitige (punktweise) Stetigkeit*

(iv) $\lim\limits_{\mu\to\infty} E_\lambda x = x$ und $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} E_\lambda x = 0$, $x \in H$.

E heißt *Spektralschar* auf [a,b], wenn $E_\lambda = I$ (Identität) $(\lambda \geq b)$ und $E_\lambda = 0$ $(\lambda < 0)$

Satz 20.2 Es sei $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ und $E : \mathbb{R} \to L(H)$ eine Spektralschar auf [a,b]. Dann existiert genau ein selbstadungierter Operator $A_f \in L(H)$ mit

$$< A_f x, x >= f(a) < E_a x, x > + \int\limits_a^b f(\lambda) d < E_\lambda x, x >=: \int\limits_{a-0}^b f(\lambda) d < E_\lambda x, x >, x \in H$$

Wir schreiben dafür $A_f = \int\limits_{a-0}^b f(\lambda) dE_\lambda = \int\limits_{a-0}^b f dE.$

Bemerkung Für $E_a \neq 0$ liefert der Punkt a einen Beitra zum Integral $\int\limits_{a-0}^b f dE.$

Dann gilt $\int\limits_{a-0}^b f(\lambda) d < E_\lambda x, x >= \int\limits_{a-\epsilon}^b f(\lambda) d < E_\lambda x, x >$, wenn man etwa f konstant auf $[a-\epsilon, b]$ fortsetzt.

Satz 20.3 (*Spektralsatz*) Es sei $A \in L(H)$ selbstadjungiert und $\sigma(A) \subset [a,b]$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Spektralschar $E : \mathbb{R} \to L(H)$ auf [a,b] mit

$$A = \int\limits_{a-0}^b \lambda dE_\lambda.$$

Für jedes $f \in C[a,b],\mathbb{R})$ gilt:

$$f(A) = \Phi_A(f) = \int\limits_{a-0}^b f dE = A_f.$$

Bemerkung: Die Spektralschar E hängt nicht vom Intervall $[a,b]$ ab, betrachte etwa $[a,b] = [m,M]$ mit $m = \min \sigma(A)$ und $M = \max \sigma(A)$.

Bemerkung 20.4 (i) Das Stieltjes-Integral existiert sogar in folgendem stärkeren Sinn: Zu $\epsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, so daß für jede Zerlegung $\lambda_0 < a = \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = b$ mit $\Delta_n = \max\limits_{j=1}^n (\lambda_j - \lambda_{j-1}) < \delta$ und beliebige Zwischenpunkte ξ_j mit $\lambda_{j-1} \leq \xi_j \leq \lambda_j$ und $\xi_1 = a$ gilt: $\|f(A) - \sum\limits_{j=1}^n f(\xi_j)(E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-1}})\| \leq \epsilon.$

(ii) Ist $f \in C([a,b],\mathbb{C})$, so erklärt man $A_f := \int\limits_{a-0}^{b} f(\lambda)dE_\lambda := \int\limits_{a-0}^{b} (Re\, f)(\lambda)dE_\lambda + i \int\limits_{a-0}^{b} (Im\, f)(\lambda)dE_\lambda$. Es ist dann $A_f = f(A) = (Re\, f + i\, Im\, f)(A)$ normal.

Satz 20.5 Es sei $A \in L(H)$ ein selbstadjungierter Operator mit $\sigma(A) \subset [a,b]$ und $E : \mathbb{R} \to L(H)$ die Spektralschar mit $A = \int\limits_{a-0}^{b} \lambda dE_\lambda$. Für $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ gelten:

(i) $\langle f(A)x, y\rangle = \int\limits_{a-0}^{b} f(\lambda)d\langle E_\lambda x, y\rangle$ für $x, y \in H$.

(ii) $\|f(A)x\|^2 = \int\limits_{a-0}^{b} f(\lambda)^2 d\langle E_\lambda x, y\rangle$ für jedes $x \in H$.

(iii) $\mu \in \sigma(A) \Leftrightarrow E_{\mu-\epsilon} = E_{\mu+\epsilon}$ für ein $\epsilon > 0$.

(iv) $\mu \in \sigma_p(A) \Leftrightarrow E_{\mu-0} \neq E_\mu$. In diesem Fall ist $E_\mu - E_{\mu-0}$ der orthogonale Projektor auf den Eigenraum $N(A - \mu I)$.

(v) λ isolierter Punkt von $\sigma(A) \Rightarrow \lambda$ Eigenwert von A

21 Unitäre Operatoren

Bemerkung: Wir wissen, daß $U = exp(iA)$ für selbstadjungiertes A unitär ist. Demnach gilt

$$(*) \quad U = exp(iA) = \int\limits_{-\pi-0}^{\pi} cos\lambda dE_\lambda + i \int\limits_{-\pi-0}^{\pi} sin\lambda dE_\lambda.$$

Satz 21.1 Sei H komplexer Hilbertraum, $U \in L(H)$ unitär. Dann gibt es einen s.a. Operator $A \in L(H)$ mit $\sigma(A) \subseteq [-\pi, \pi]$ und $U = exp(iA)$. Mit der Spektralschar E_λ von A gilt $(*)$.

Folgerung 21.2 Die Gruppe U(H) der unitären Operatoren in L(H) ist wegweise zusammenhängend.

Folgerung 21.3 Die Gruppe Gl(H) der invertierbaren Operatoren in L(H) ist ebenfalls wegweise zusammenhängend.

Bemerkung 21.4 Nach H. Kuiper (1964) ist Gl(H) sogar *zusammenziebar*,, d.h. homotopieäquivalent zu einem Punkt, denn es gibt eine stetige Abbildung

$F : Gl(H) \times [0,1] \to Gl(H)$ mit $F(A,0) = A$ und $F(A,1) = I$, $A \in Gl(H)$. Für Gl(E) gilt dies nach G. Neubauer (1967) auch etwa für $E = l_p$ im Fall $1 \leq p < \infty$ oder für $E = c_0$. Nach A. Douady (1965) ist aber zum Beispiel für den Banachraum $E = l_1 \times l_2$ die Gruppe nicht zusammenhängend.
Wie C.R.Putman 1959 zeigte, sind auch im Fall eines reellen unendlichdimensionalen Hilbertraumes die *orthogonale Gruppe* und die *reguläre Gruppe* wegweise zusammenhängend; die orthogonale Gruppe und die reguläre Gruppe des $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bestehen hingegen auch genau zwei Komponenten, die durch das Vorzeichen der Determinante unterschieden werden.

Definition Ein Operator $U \in L(H)$ heißt eine *partielle Isometrie*, wenn ein abgeschlossener Unterraum $G \subseteq H$ existiert, so daß $U : G \to U(G)$ Isometrie ist und $U_{|G^\perp} = 0$.

Satz 21.5 *Polarzerlegung.* Es sei H ein kompakter Hilbertraum und $A \in L(H)$.

(i) Dann existiert eine partielle Isometrie $U \in L(H)$ mit $A = U|A|$, und genau eine solche mit $N(U) = N(A)$.

(ii) Ist A normal, so hat A eine Polarzerlegung $A = U|A|$ mit $U \in U(H)$.

(iii) Ist A invertierbar, so gibt es genau ein $U \in U(H)$ mit $A = U|A|$.

22 Kompakte Operatoren in Banachräumen

Satz 22.1 (*von Schauder*). Es seien E, F Banachräume und $A \in L(E,F)$. Dann gilt $A \in K(E,F)$ genau dann. wenn $A' \in K(F',E')$.

Folgerung 22.2 Sind E, F Hilberträume, so ist $A \in L(E,F)$ kompakt genau dann, wenn A^* kompakt ist.

Satz 22.3 Es seien E ein Banachraum und $A \in K(E)$. Dann gelten:

(i) $\dim N(I-A) < \infty$

(ii) $R(I-A)$ ist abgeschlossen

(iii) $\operatorname{codim} R(I-A) = \dim N(I'-A') < \infty$.

Lemma 22.4 Es seien E Banachraum, $A \in K(E)$ und $T = I - A$

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $dim N(T^n) < \infty$ und $N(T^n) \subseteq N(T^{n+1})$

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $R(T^n)$ abgeschlossen, $codim R(T^n) < \infty$, $R(T^n) \supseteq R(T^{n+1})$

(iii) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $N(T^n) = N(T^{n+1})$

(iv) Es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $N(T^n) = N(T^k)$ für alle $k \geq n$ und $R(T^n) = R(T^k)$ für alle $k \geq n$.

(v) Ist n wie in (iv), so gilt $E = N(T^n) \oplus R(T^n)$ als topologisch direkte Summe. Ferner ist die Einschränkung $T : R(T^n) \to R(T^n)$ ist Isomorphismus und $T : N(T^n) \to N(T^{n+1})$ ist nilpotent.

(vi) Es gilt: $N(T^n) = N(T^{n+1})$ genau dann, wenn $R(T^n) = R(T^{n+1})$. Für jedes solche n gilt die Aussage von (iv)

Bemerkung 22.5 Für $T \in L(E)$ hat man die *aufsteigende Nullraumkette* $N(T) \subseteq N(T^2) \subseteq ...$ und die *absteigende Bildraumkette* $R(T) \supseteq R(T^2) \supseteq ....$ $\alpha(T) := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : N(T^n) = N(T^{n+1})\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ ($\in \mathbb{N}_0$ für $T = I - A$, A kompakt.) heißt *ascent* von T. $\delta(T) := inf\{n \in \mathbb{N}_0 : R(T^n) = R(T^{n+1})\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ heißt *descent* von T. Für $\in K(E)$, $T = I - A$ ist $\alpha(I - A) = \delta(I - A)$.

Satz 22.6 Es sei E Banachraum, $A \in K(E)$ und $\lambda \in \sigma(A)$ 0. $N_\lambda = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} N((\lambda I - A)^k)$ *Hauptraum* // Dann gilt:

(i) $\lambda I - A : N_\lambda \to N_\lambda$ ist nilpotent

(ii) Es gibt eine topologisch direkte Zerlegung $E = N_\lambda \oplus R_\lambda$ mit einem abgeschlossenem Unterraum $R_\lambda \subset E$ mit $A(R_\lambda \subseteq R_\lambda$ ($A(N_\lambda) \subseteq N_\lambda$), so daß $\lambda I - A : R_\lambda \to R_\lambda$ Isomorphismus ist.

(iii) Für $\mu \in \sigma(A)$ 0 mit $\mu \neq \lambda$ gilt $N_\lambda \subseteq R_\mu$

(iv) Es gilt $0 \neq N(\lambda I - A) \subseteq N_\lambda$ und $dim(N_\lambda) < \infty$ (λ ist Eigenwert)

Satz 22.7 Es sei E ein Banachraum, $A \in K(E)$

(i) Jedes $\lambda \in \sigma(A)$ 0 ist Eigenwert, der zugehörige *Eigenraum* $E_\lambda = N(\lambda I - A)$ und *Hauptraum* N_λ sind endlichdimensional.

(ii) Es gibt eine Nullfolge $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{K}$ mit $\sigma(A) \subset \{0\} \cup \lambda_n : n \in \mathbb{N}$

(iii) Ist $dim(E) = \infty$, so gilt $0 \in \sigma(A)$.

Bemerkung 22.8 (i) Für $A \in K(E), \lambda \in \sigma(A)$ 0 ist (N_λ, R_λ) *reduzierend* für A, d.h $E = N_\lambda \oplus R_\lambda$, N_λ, R_λ invariant unter A, $\lambda I - A : N_\lambda \to N_\lambda$ nilpotent. $dim(N_\lambda) < \infty$. Lineare Algebra liefert Darstellung $A : N_\lambda \to N_\lambda$ durch Jordanblöcke. Wegen 22.6 (iii) gilt dabei $N_\lambda \cap N_\mu = 0$, $\lambda \neq \mu$, $\lambda \in \mathbb{N}$.

(ii) Der Volterra - Integral - Operator $V \in L(L_2[0, 1])$ aus 6.10 hat keine Eigenwerte und ist kompakt. $\sigma(V) = 0$ nach 22.7 $\Rightarrow \lim\limits_n = \|V^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$.

Satz 22.9 Es sei E ein Banachraum, $A \in K(E)$ und $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$.

(i) (*Fredholmsche Alternative*).

$$\lambda I - A \text{ surjektiv } \Leftrightarrow \lambda I - A \text{ injektiv}$$

Das heißt: Die Gleichung $(\lambda I - A)x = y$ ist genau dann für jedes $y \in E$ lösbar, wenn die homogene Gleichung $(\lambda I - A)x = 0$ nur die triviale Lösung hat.

(ii) Es gilt $\dim N(\lambda I - A) = \dim N(\lambda I' - A') < \infty$.

(iii) Ist $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ eine Basis von $N(\lambda I' - A')$, so ist für $y \in E$ die Gleichung $(\lambda I - A)x = y$ genau dann lösbar, wenn $\phi_j(y) = 0\,,\ j = 1, \ldots, n$.

Operatoren mit abgeschlossenem Bild werden auch *normal auflösbar* genannt. Der Satz 22.9 wurde im Spezialfall der Fredholmschen Integralgleichung

$$\lambda f(x) - \int\limits_a^b k(x,y) f(y)\, dy = g(x) \qquad k \in C([a,b]^2)$$

von E. I. Fredholm (1900) behandelt. Hier liefert 22.9 ein konkretes Lösbarkeitskriterium von $(\lambda I - k)f = g$.

Bemerkung 22.10 Für $A \in K(E)$ ist die Resolvente $R_A : \rho(A) \to L(E)$ eine holomorphe Operatorfunktion im Sinn von 17.8. Aus der Sicht der Funktionentheorie besteht $\sigma(A)$ aus den Singulatitäten der Resolvente. $\sigma(A)\backslash\{0\}$ liegt diskret in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Die Resolvente (in einem geeignetem Sinn) definiert eine in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ *meromorphe Operatorfunktion*, die in $\lambda \in \sigma(A)\backslash\{0\}$ einen Pol der Ordnung $p = \alpha(\lambda I - A) = \delta(\lambda I - A) < \infty$ hat, und um $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ eine Laurent-Entwicklung $(\mu I - A)^{-1} = \sum\limits_{k=-p}^{\infty} A_k(\mu - \lambda)^k$ mit $A_k \in L(E)$ und $\dim R(A_k) < \infty$ für $k < 0$ besitzt.
Hingegen ist die Resolvente in 0 i.a. nicht meromorph. (Beispiel: Volterra-Operator)

23 Fredholmoperator

Für $A \in K(E)$ ist $I - A$ Fredholmoperator im Sinne von:

Definition 23.1 E, F Banachräume. $A \in L(E,F)$ heißt *Fredholmoperator*, wenn $\dim N(A) < \infty$ und $\operatorname{codim} R(A) < \infty$; man schreibt dann $A \in \Phi(E,F)$ bzw. $A \in \Phi(E)$ im Fall $E = F$. Der Index von A wird definiert durch

$$\mathrm{ind} A := \dim N(A) - \operatorname{codim} R(A).$$

Beispiel 23.2 (i) Für $A \in K(E)$ gilt $I - A \in \Phi(E)$. Dabei gilt $\mathrm{ind}(I - A) = 0$. Dies beinhaltet auch die Fredholmsche Alternative.

(ii) Der Linksshift $L \in \Phi(l_2)$ ist Fredholmoperator mit dem Index $\mathrm{ind}L = 1$; der Rechtsshift $R \in \Phi(l_2)$ hat den Index $\mathrm{ind}R = -1$.

Satz 23.3 (Kato 1958). Für $A \in L(E, F)$ mit $\mathrm{codim}R(A) < \infty$ ist $R(A)$ stets abgeschlossen. Speziell hat jeder Fredholmoperator abgeschlossenes Bild.

Satz 23.4 Seien E, F Banachräume und $A \in \Phi(E, F)$. Sann gilt $A' \in \Phi(F', E')$ und $\mathrm{ind}A = -\mathrm{ind}A$.

Bemerkung 23.5 ISt H ein Hilbertraum und $A \in L(H)$, so gilt $A \in \Phi(H)$ genau dann, wenn $A^* \in \Phi(H)$. In diesem Fall gilt $\mathrm{ind}A = -\mathrm{ind}A^*$.
Ist $A \in \Phi(H)$ normal, so gilt $\mathrm{ind}A = 0$.

Für einen Banachraum E ist $L(E)/K(E)$ eine Banachalgebra, die sogenannte *Calkin-Algebra* (nach J.W. Calkin). Es bezeichne $\pi : L(E) \to L(E)/K(E)$ die Quotientenabbildung.

Satz 23.6 Für einen Banachraum E und $A \in L(E)$ sind äquivalent:

(i) $A \in \Phi(E)$

(ii) πA ist in $L(E)/K(E)$ invertierbar

(iii) Es gibt $B \in \Phi(E)$, so daß $AB - I$ und $BA - I$ endlichdimensionale Projektionen sind.

Ein Fredholmoperator $A \in \Phi(E)$ ist „bis auf einen endlichdimensionalen Fehler invertierbar“; einen Operator B wie in 23.6 bezeichnet man auch als eine *Parametrix.*

Folgerung 23.7 Für einen Banachraum E gelten

(i) $\Phi(E)$ ist offen in L(E)

(ii) Für $A, B \in \Phi(E)$ ist $AB \in \Phi(E)$

(iii) Für $A \in \Phi(E), B \in K(E)$ gilt $A + B \in \Phi(E)$

Satz 23.8 Sei E Banachraum, $A \in \Phi(E)$. Dann gibt es $\epsilon > 0$, so daß für alle $B \in L(E)$ mit $|A - B| < \epsilon$ gilt: $B \in \Phi(E)$, $dimN(E) \leq dimN(A)$ und $indB = indA$.

Folgerung 23.9 E sei Banachraum

(i) $ind : \Phi(E) \to \mathbb{Z}$ ist stetig, also auf den Zusammenhangskomponenten von $\Phi(E)$ konstant.

(ii) Für $A \in K(E)$ gilt: $ind(I - A) = 0$.

(iii) Für $A \in \Phi(E)$ und $B \in K(E)$ gilt: $ind(A + B) = ind(A)$.

(iv) (F. V. Atkinson) Für $A, B \in \Phi(E)$ gilt: $ind(AB) = indA + indB$.

Bemerkung 23.10

Satz 23.11 Es sei E Banachraum

(i) Wenn GL(E) wegweise zusammenhängend $\Rightarrow \Phi - 0(E)$ ist wegweise zusammenhängend

(ii) Wenn $\Phi_0(E)$ wegweise zusammenhängend $\Rightarrow \Phi_n(E)$ wegweise zusammenhängend, $n \in \mathbb{Z}$

Folgerung 23.12 *(Cordes)* Für einen komplexen Hilbertraum H sind die Mengen $\Phi_n(H)$, $n \in \mathbb{Z}$ stets wegweise zusammenhängend.

Satz 23.13 (A. Douady 1965). Für den Banachraum $E = l_1 \times\ l_2$ ist die reguläre Gruppe $\mathfrak{G}L(E)$ nicht zusammenhängend.

IV. Unbeschränkte Operatoren

24 Abgeschlossene Operatoren

Definition 24.1 Es seien E, F Banachräume.

(i) Ein Operator von E nach F (bzw. in E, falls $F = E$) ist eine auf einem linearen Unterraum $\mathfrak{D}(A) \subset E$ erklärte lineare Abbildung $A : \mathfrak{D}(A) \to F$; $\mathfrak{D}(A)$ heißt *Definitionbereich* von A, $R(A) := \{\, Ax \mid x \in \mathfrak{D}(A) \,\}$ heißt der *Wertebereich* von A. A heißt *dicht definiert*, wenn $\mathfrak{D}(A)$ dicht in E ist.

(ii) $\mathfrak{G}(A) := \{\, (x, Ax) \mid x \in \mathfrak{D}(A) \,\} \subset E \times F$ heißt *Graph* des Operators A. Auf $\mathfrak{D}(A)$ wird durch $\|x\|_A := \sqrt{\|x\|^2 + \|Ax\|^2}$ die *Graphennorm* definiert.

(iii) Ein Operator B heißt eine *Erweiterung* von A (bzw. A eine *Einschränkung* von B), wenn $\mathfrak{G}(A) \subset \mathfrak{G}(B)$; man schreibt dann $A \subset B$.

(iv) Der Operator A heißt

(a) A *abgeschlossen* $:\Leftrightarrow \mathfrak{G}(A)$ abgeschlossen in $E \times F$

(b) A *abschließbar* $:\Leftrightarrow \overline{\mathfrak{G}(A)}$ Graph eines Operators B
Man nennt dann B die *Abschließung* von A und schreibt $\bar{A} = B$

Satz 24.2 Für einen Operator A von E nach F sind äquivalent:

(i) A ist abgeschlossen.

(ii) $(\mathfrak{D}(A), \|\ \|_A)$ ist vollständig.

(iii) Gilt $x_n \in \mathfrak{D}(A), x_n \to x$ in E und $Ax_n \to y$ in F , so folgt $x \in \mathfrak{D}(A)$ und $Ax = y$

Beispiel 24.3 (i) Es sei $E = F = C[a, b]$, $\mathfrak{D}(A) = C^1[a, b]$ und $Af = f'$, $f \in \mathfrak{D}(A)$. Dann ist A abgeschlossen. A ist aber unstetig (vgl. 2.6 (ix)).

(ii) Für $E = F = L_2[a, b]$ ist der durch $\mathfrak{D}(A) = C^1[a, b]$ und $Af = f'$ für $f \in \mathfrak{D}(A)$ erklärte Operator nicht abgeschlossen. A ist aber abschließbar.

Satz 24.4 Ein Operator A von E nach F ist abschließbar genau dann, wenn für jede Folge $x_n \in \mathfrak{D}(A)$ mit $x_n \to 0$ und $Ax_n \to y \in F$ gilt $y = 0$

Bemerkung 24.5 Ist der Operator A abschließbar, so ist der Operator $\bar{A}$ abgeschlossen und $\mathfrak{G}(\bar{A}) = \overline{\mathfrak{G}(A)}$. Wegen 24.2 ist der Banachraum $(\mathfrak{D}(\bar{A}), \|\ \|_{\bar{A}})$ eine Vervollständigung für $(\mathfrak{D}(A), \|, \|_A)$ im Sinn von 14.7, für die wir $(\mathfrak{D}(A), \|\ \|_A)^\wedge$ schreiben. Dabei gilt

$$\mathfrak{D}(\bar{A}) = \{\, x \in E \mid \text{ es gibt } x_n \in \mathfrak{D}(A) \text{ mit } x_n \to x, \text{ so daß } (Ax_n) \text{ konvergiert} \,\}$$

und $\bar{A}x = \lim_{n\to\infty} Ax_n$ sowie $\|x\|_{|A|} = \lim_{n\to\infty} \|x\|_A$ für $x \in \mathfrak{D}(\bar{A})$ und x_n wie angegeben.

Beispiel 24.6 $Af = f'$, A in $L_2[a,b]$, $D(A) = C^1[a,b]$. Es gilt: <u>A ist abschließbar</u>, wo $\overline{A}$ definiert ist durch $\overline{A}f = f'$ und $D(\overline{A}) = H^1[a,b] = (D(\overline{A}), \|.\|_{\overline{A}})$. Man nennt $H^1[a,b]$ einen Sobolevraum.

Definition 24.7 Für Operatoren A, B von E nach F und C von F nach g erklärt man A + B durch $D(A+B) = D(A) \cap D(B)$ und $(A+B)x := Ax + Bx$. $D(CA) = \{x \in D(A) : Ax \in D(C)\}$ und $(CA)x := C(Ax)$. A injektiv, so erklärt man A^{-1} durch $D(A^{-1} = R(A)$ und $A^{-1}y = x$, falls y = Ax.
Ein injektiver Operator A ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ A^{-1} ist abgeschlossen.

Definition 24.8 Für einen Banachraum E und einen Operator A in E mit D(A) heißt $\rho(A) = \{z \in \mathbb{C} : (zI - A)\text{bijektiv}, (zI - A)^{-1} \in L(E)\}$ die *Resolventenmenge* von A. $\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\sigma(A)$ heißt das *Spektrum von A*. Die Funktion $R_A : \rho(A) \to L(E)$, $R_A(z) = (zI - A)^{-1}$ heißt die *Resolvente von A*.
$\rho(A) = \emptyset$ ist möglich. Wenn $\rho(A) \neq \emptyset$, so ist A abgeschlossen.

Satz 24.9 Es sei A ein abgeschlossener Operator im Banachraum E.

(i) Dann ist $\rho(A) = \{z \in \mathbb{C} : (zI - A)\text{bijektiv}\}$ [automatisch Stetigkeit des Inversen!]

(ii) $\sigma(A)$ ist abgeschlossen, $\rho(A)$ offen, Resolvente $R_A : \rho(A) \to L(E)$ ist stetig und auch holomorph im Sinn von 17.8(ii).

F, G, H Hilberträume über $\mathbb{K}$. Dann ist $H \times G$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $< (h_1, g_1), (h_2, g_2) > := < h_1, h_2)_H + < g_1, g_2 >_G$, wo $h_1, h_2 \in H, g_1, g_2 \in G$.

Definition 24.10 Es sei A ein dicht definierter Operator von H in G (, d.h. D(A) dicht in H). Durch $D(A^*) := \{y \in G : x \mapsto < Ax, y >$ ist stetig auf D(A) $\} = \{y \in G : x \mapsto < Ax, y > = < x, z >$ für alle $x \in D(A)\}$. Man setzt dann A*y:=z. Dadurch wird genau ein linearer Operator $A^* : (D(A^*) \subseteq G) \to H$ definiert, den man den zu A *adjungierten* Operator bezeichnet. Damit ist $< Ax, y > = < x, A^*y >$ für alle $x \in D(A), y \in G$.

Bemerkung 24.11 (i) A* ist wohldefiniert

(ii) $A \in L(H) \Rightarrow A^* \in L(H)$

(iii) Für dicht definierten Operator A, B mit $A \subseteq B$ gilt $B^* \subseteq A^*$.

Lemma 24.12 Für jeden dicht definierten Operator A von H nach G gilt: $G(A^*) = U(G(A)^\perp) = (U(B(A)))^\perp$, wo $U : H \times G \to G \times H$ mit $(x, y) \mapsto (y, -x)$; U ist unitär.

Satz 24.13 Sei A dicht definierter Operator von H nach G.

(i) A^* ist abgeschlossen, $N(A^*) = R(A)^\perp$

(ii) A^* dicht definiert genau dann, wenn A abschließbar ist.
In diesem Fall gilt: $\bar{A} = A^{**} := (A^*)^*$ und $(\bar{A})^* = A^*$
Ist A abgeschlossen, so gilt $A = A^{**}$ und $N(A) = R(A^*)^\perp$

(iii) Ist A injektiv mit dichtem Bild, so ist auch A^* injektiv und $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

Bemerkung 24.14 A, B dicht definierter Operator, con H nach G und C dicht definierter Operator von G nach F.

(i) $A + B$ dicht definiert $\Rightarrow$ $A^* + B^* \subset (A + B)^*$
Ist $B \in L(H, G)$, so gilt $A^* + B^* = (A + B)^*$

(ii) Ist CA dicht definiert, so gilt $A^*C^* \subset (CA)^*$
Im Fall $C \in L(G, F)$ gilt $A^*C^* = (CA)^*$.

25 Symmetrische und selbstadjungierte Operatoren

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$, H $\mathbb{C}$-Hilbertraum

Definition 25.1 A dicht definiert im Hilbertraum H.
A heißt *symmetrisch*, wenn $A \subset A^*$ gilt.
selbstadjungiert, wenn $A = A^*$ gilt.

Bemerkung 25.2 (i) Ein dicht definierter Operator A ist symmetrisch
$\Leftrightarrow$ $< Ax, y >=< x, Ay >$ $\forall x, y \in D(A)$
In diesem Fall ist $< Ax, x >= \overline{< Ax, x >}$ stets reell , $x \in D(A)$
A selbstadjungiert $\Leftrightarrow$ A symmetrisch und $D(A^*) \subset D(A)$

(ii) Jeder selbstadjungierte Operator ist abgeschlossen nach 24.13(i) , und

$$A = A^* = A^{**}$$

(iii) Jeder symmetrische Operator ist abschließbar wegen $A \subset A^*$ und 24.4.
$\bar{A}$ ist symmetrisch wegen $\bar{A} \subset A^* = (\bar{A})^*$

(iv) Für einen symmetrischen Operator A ist $\bar{A}$ genau dann selbstadjungiert, wenn A^* symmetrisch ist, in diesem Fall nennt man A *wesentlich selbstadjungiert*, und es gilt

$$\bar{A} = A^*$$

(v) $A \in L(H)$ und symmentrisch $\Rightarrow$ A selbstadjungiert (d.h. $A = A^*$)
Im beschränkten Fall: A symmetrisch $\Leftrightarrow$ A selbstadjungiert

Lemma 25.3 Sei A symmetrischer Operator in H. Dann:

$$||(zI - A)x|| \geq |\mathrm{Im} z| \cdot ||x|| \qquad , x \in D(A), \;\; z \in \mathbb{C}$$

Ist A abgeschlossen, und $\mathrm{Im} z \neq 0$, so ist $zI - A$ injektiv und $R(zI - A)$ abgeschlossen.

Lemma B abgeschlossen, $||Bx|| \geq C||x||$, $x \in D(B)$ $\Rightarrow$ $R(B)$ abgeschlossen

Satz 25.4 Es sei A ein selbstadjungierter Operator in H.

(i) Dann gilt: $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$
Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist die Resolvente $R_A(z)$ normal, $R_A(z)^* = R_A(\bar{z})$ und $||R_A(z)|| \leq \frac{1}{|\mathrm{Im} z|}$

(ii) Für $z \in \mathbb{R}$ gilt: $N(zI - A) = N(zI - A^*) = R(zI - A)^\perp$
Folglich ist $z \in \mathbb{R}$ Eigenwert genau dann, wenn $\overline{R(zI - A)} \neq H$

(iii) Für $z \in \mathbb{C}$ gilt: $z \in \sigma(A)$ $\Leftrightarrow$ $R(zI - A) = H$

Für jeden Operator A in H hat man eine disjunkte Zerlegung des Spektrums

$$\sigma(A) = \underbrace{\sigma_p(A)}_{\text{Eigenwerte}} \;\dot\cup\; \underbrace{\sigma_C(A)}_{\substack{\text{Kontinuierliches}\\ \text{Spektrum}}} \;\dot\cup\; \underbrace{\sigma_r(A)}_{\text{Residualspektrum}}$$

$$\sigma_C(A) = \{z \in \sigma(A) | N(zI - A) = \{0\}, \overline{R(zI - A)} = H\}$$
$$\sigma_r(A) = \{z \in \sigma(A) | N(zI - A) = \{0\}, \overline{R(zI - A)} \neq H\}$$

Ist A selbstadjungiert, so folgt $\sigma_r(A) = \emptyset$.

Satz 25.5 Es sei A ein symmetrischer Operator in H.

(i) Gilt $R(zI - A) = R(\overline{z}I - A) = H$ für ein $z \in \mathbb{C}$, so ist A selbstadjungiert.
[Gleichungen lösen]

(ii) Ist A abgeschlossen und gilt $N(zI - A^*) = N(\overline{z}I - A^*) = 0$ für ein $z \in \mathbb{C}$
$\mathbb{R}$, so ist A selbstadjungiert.

Folgerung 25.6 Für jeden dicht definierten Operator A in A sind äquivalent:

(i) A ist selbstadjungiert

(ii) A ist symmetrisch und $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$

(iii) A ist symmetrich und es gibt $z \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{R}$: $z\overline{z} \in \rho(A)$

Beispiel 25.7

Lemma 25.8 Sei $h \in L_2[a,b]$, $\int\limits_a^b f'(t)h(t)dt = 0$ für $f \in C_C^\infty(a,b)$, wo $C_C^\infty(a,b) := \{f \in C^\infty(a,b) : \text{supp f} \subset \overset{\circ}{(a,b)}\}$. Daraus folgt: h = const in $L_2[a,b]$.

Cayley - Transformation
Motivation: Möbiustransformationen

Definition 25.9 Für einen symmetrischen Operator A in H ist (-iI - A) wegen 25.3 injektiv. Der Operator $U = U(A) := (iI - A)(-iI - A)^{-1} = -(iI - A)(iI + A)^{-1}$ heißt die *Cayley Transformierte von A*. $D(U) := R(-iI - A)$

Satz 25.10 Für jeden symmetrischen Operator A ist U = U(A) eine isometrische lineare Bijektion von R(-iI-A) auf R(iI-A). Es gilt

(i) I - U ist injektiv

(ii) $R(I - A) = D(A)$ ist dicht in H

(iii) es gilt: $A = (I + U)(I - U)^{-1}$

Ist A selbstadjungiert, so ist $U \in L(H)$ unitär.

Satz 25.11 Es sei U ein Operator in H, so daß U eine Isometrie von $D(U)$ auf $R(U)$ ist. Sei $I - U$ injektiv, und $R(I - U)$ dicht.
Dann ist U die Cayley-Transformierte genau eines symmetrischen Operators A in H ($U = U(A)$) und A ist $A = i(I + U)(I - U)^{-1}$.
Ist $U \in L(H)$ unitär, so ist A selbstadjungiert.

Bemerkung 25.12 Ist $U \in L(H)$ unitär und $I - U$ injektiv, so ist $R(I - U)$ dicht.

Wegen 25.11 und 25.12 ist die Cayley-Transformation eine bijektive Abbildung von der Menge der selbstadjungierten Operatoren in H auf

$$\{U \in L(H) | U \text{ unitär, } I - U \text{ injektiv}\}$$

Die Umkehrabbildung ist $U \mapsto i(I + U)(I - U)^{-1}$.

26 Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren (unbeschränkter Fall)

Vorgehen

1. $A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda$ erklären
2. Spektralsatz

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig, und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, so daß $g|_{[a,b]} \in BV[a,b] \;\; \forall a < b$

$$\begin{aligned} \int f \, dg &:= \int_{-\infty}^{\infty} f \, dg \\ &:= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, dg(t) \\ &:= \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 f \, dg + \lim_{b \to \infty} \int_0^b f \, dg \text{ sofern } \textit{beide} \text{ Limiten existieren.} \end{aligned}$$

$\int f \, dg$ heißt (Riemann)-Stieltjes Integral von f bzgl. g.
H komplexer Hilbertraum

Lemma 26.1 Es sei $E : \mathbb{R} \to L(H)$ eine Spektralschar. $f \in C([a,b]\mathbb{R})$.

(i) Dann gibt es genau einen selbstadjungierten Operator $\int_a^b f \, dE = \int_a^b f(\lambda) \, dE_\lambda \in L(H)$ mit

$$< (\int_a^b f \, dE)x, x >= \int_a^b f(\lambda) \, d < E_\lambda x, x > \quad , x \in H$$

(ii) $< (\int_a^b f \, dE)x, y >= \int_a^b f(\lambda) \, d < E_\lambda x, y > \quad , x, y \in H$

(iii) $||(\int_a^b f \, dE)x||^2 = \int_a^b ||f(\lambda)||^2 \, d < E_\lambda x, x > \quad , x \in H$

(iv) $\int_a^b (fg) \, dE = (\int_a^b f \, dE)(\int_a^b g \, dE)$

(v) Zu $\varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0$, so daß für jede Zerlegung $a = \lambda_0 < \ldots < \lambda_n = b$ mit $\max\limits_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) < \delta$ und alle $\xi_i \in [\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ gilt:

$$|| \int_a^b f \, dE - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}})|| < \varepsilon$$

Satz 26.2 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $E : \mathbb{R} \to L(H)$ eine Spektralschar.
Dann existiert genau ein dicht definierter symmetrischer Operator A_f in H mit

(i) $D(A_f) = \{x \in H | \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 \, d < E_\lambda x, x >< \infty\}$

(ii) $< A_f x, x >= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \, d < E_\lambda x, x > \quad x \in D(A_f)$

Wir schreiben dann $A_f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \, dE_\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f \, dE = \int f(\lambda) \, dE_\lambda = \int f \, dE$.

Es gilt:

(iii) $D(A_f) = \{x \in H | \lim\limits_{n\to\infty} (\int\limits_{-n}^{n} f \, dE)x$ existiert$\}$

(iv) $A_f x = \lim\limits_{n\to\infty} (\int\limits_{-n}^{n} f \, dE)x \quad , x \in D(A_f)$

Bemerkung 26.3 ISt $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig und E Spektralschar, so setze

$$\int_a^b f \, dE = \int_a^b \mathrm{Re} f \, dE + i \int_a^b \mathrm{Im} f \, dE$$

Dann gelten 26.1 (ii), (iii), (iv) für $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig

Erkläre für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig

$$\Phi_E(f) = \int f \, dE = \int \mathrm{Re} f \, dE + i \int \mathrm{Im} f \, dE$$

Satz 26.4 (Funktionalkalkül) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig, E eine Spektralschar.
Dann ist $\Phi_A(f)$ ein sbgeschlossener dicht definierter Operator.
Ist f reell, so ist $\Phi_E(f)$ selbstadjungiert.

(i) $D(\Phi_E(f)) = \{x \in H | \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 \, d < E_\lambda x, x > < \infty\} = \{x \in H | \lim\limits_{n\to\infty} (\int\limits_{-n}^{n} f \, dE)x$ existiert$\}$

(ii) $< \Phi_E(f)x, y >= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \, d < E_\lambda x, y > \quad , x \in D(\Phi_E(f)), y \in H$

(iii) $||\Phi_E(f)x|| = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 \, d < E_\lambda x, x > \quad , x \in D(\Phi_E(f))$

(iv) $(\Phi_E(f))^* = \Phi_E(\bar{f})$ (incl. Definitionsbereich)

Satz 26.5 Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig, E Spektralschar.

(i) $\Phi_E(f) + \Phi_E(g) \subseteq \Phi_E(f + g)$

(ii) $\Phi_E(f)\Phi_E(g) \subset \Phi_E(f \cdot g)$ und $D(\Phi_E(f)\Phi_E(g)) = D(\Phi_E(f \cdot g)) \cap D(\Phi_E(g))$

(iii) Ist $A = \Phi_E(\lambda)$ und $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, so ist $R_A(z) = \Phi\left(\frac{1}{z-\lambda}\right) = \int \frac{1}{z-\lambda} dE$

Satz 26.6 (*Spektralsatz*) Es sei A ein selbstadjungierter Operator in H. Dann gibt es genau eine Spektralschar $E : \mathbb{R} \to L(H)$ mit $A = \int \lambda dE_\lambda$.

Folgerung 26.7 (ohne Beweis) Sei A selbstadjungiert, dann existiert genau eine Spetralschar E_λ mit $A = \int \lambda dE_\lambda$ und es gilt: $< (E_b - E_a)x, y >= \lim_{\delta \to 0^+} \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a+\delta}^{b+\delta} < (R_A(t - i\epsilon) - R_A(t + i\epsilon))x, y > dt$