Funktionalanalysis I

Kurzskriptum nach einer Vorlesung von
apl. Professor Dr. M. Poppenberg

Universität Dortmund – Sommersemester 1998

Letzte Änderung: 17. November 2001

Dieses Kurzskript ist aus meiner persönlichen Mitschrift der Vorlesung

Funktionalanalysis I

bei *apl. Professor Dr. M. Poppenberg* im Sommersemester 1998 entstanden. Ich habe versucht alles richtig wiederzugeben, kann allerdings keine Garantie darauf geben. Es ist deshalb wahrscheinlich, daß dieses Skriptum Fehler enthält.

Ingo Manfraß

INHALTSVERZEICHNIS ZU FUNKTIONALANALYSIS I

1. Normierte Räume:

Simultan: $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$

$\mathbf{N} := \{1, 2, 3, ...\}$, $\mathbf{N}_0 := \mathbf{N} \cup \{0\}$

Definition 1.1: Es sei E ein Vektorraum über **K**. Eine Norm auf E ist eine Abbildung
$\|.\| : E \to \mathbf{R}_+$ mit folgenden Eigenschaften:
(N1) $\|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\| \quad \forall\, x \in E, \lambda \in \mathbf{K}$
(N2) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \ \forall\, x, y \in E$ (Dreiecksungleichung)
(N3) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Man bezeichnet das Paar $(E, \|.\|)$ oder kurz E als einen normierten Raum.

Bemerkung 1.2. (i) Gelten für $\|..\| : E \to \mathbf{R}_+$ nur die Eigenschaften (N1) und (N2), so nennt man $\|.\|$ eine Halbnorm auf E.
(ii) Für eine Halbnorm $\|.\|$ auf E gilt $|\, \|x\| - \|y\|\, | \le \|x - y\| \quad \forall\, x, y \in E$.

Definition 1.3: Es sei X eine Menge. Eine Abbildung $d: X \times X \to \mathbf{R}_+$ heißt eine Metrik auf X, wenn folgendes gilt:
(M1) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall\, x, y \in X$ (Symmetrie)
(M2) $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z) \quad \forall\, x, y, z \in X$ (Dreiecksungleichung)
(M3) $d(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow x = y$
Man bezeichnet das Paar (X, d) oder kurz X als metrischen Raum.

kanonische Metrik $d(x,y) = \|x - y\| \quad , x, y \in E$.

für normierte Räume sind alle metrischen (und damit auch alle topologischen) Begriffe erklärt: Stetigkeit, Konvergenz, Kompaktheit, ...

Definition 1.4. Eine Folge (x_n) in einem metrischen Raum (X, d) heißt konvergent gegen einen Grenzwert (oder Limes) $x \in E$, in Zeichen $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, wenn gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbf{N}\ \forall\, n \ge n_0: d(x_n, x) < \varepsilon$$

Die Folge (x_n) heißt Cauchy-Folge, wenn gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbf{N}\ \forall\, m, n \ge n_0: d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Ein metrischer Raum X heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge in X konvergiert.
Ein normierter Raum, der bezüglich seiner kanonischen Metrik vollständig ist, heißt Banachraum.

Ist E ein normierter Raum und $F \subset E$ ein Unterraum, so ist auf F ein normierter Raum mit der eingeschränkten Norm; ist E Banachraum, so ist F Banachraum genau dann, wenn F abgeschlossen in E ist, denn

Bemerkung 1.5. : Ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $A \subset X$, so ist (A, d) vollständig genau dann, wenn A abgeschlossen in X ist, d.h., wenn jede in X konvergente Folge $(x_n) \subset A$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in A$.

Funktionenräume:

Beispiele 1.6:

(i) Es sei M eine beliebige, nichtleere Menge. Dann ist der **K** –Vektorraum der beschränkten **K** – wertigen Funktionen auf M erklärt durch:

$l_\infty(M) = \{f: M \to \mathbf{K} \mid \|f\|_\infty := \sup\limits_{t\in M} |f(t)| < \infty\}$

ein Banachraum. Die Konvergenz einer Folge in $l_\infty(M)$ ist gleichbedeutend mit der gleichmäßigen Konvergenz auf M. Speziell bezeichnet man mit $l_\infty := l_\infty(\mathbf{N})$ den Banachraum der **K** – wertigen beschränkten Folgen.

(ii) Die Folgenräume c der konvergenten Folgen in **K** und c_0 der Nullfolgen in **K** sind Banachräume als abgeschlossene Unterräume von l_∞.

(iii) Für a < b bezeichnet C[a,b] den **K** – Vektorraum aller stetigen Funktionen f: $[a,b] \to \mathbf{K}$. $(C,[a,b], \|.\|_\infty)$ ist ein Banachraum als abgeschlossener Unterraum von $l_\infty([a,b])$.
Allgemeiner ersetzt man [a,b] durch einen kompakten metrischen Raum X.

(iv) Für $k \in \mathbf{N}_0$ und a < b bezeichnet $C^k[a,b]$ den Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen f: $[a,b] \to \mathbf{K}$, $C^k[a,b]$ ist Banachraum mit der Norm

$$\|f\|_{c^k} = \max_{i=0}^{k} \|f^{(i)}\|_\infty .$$

Die Konvergenz einer Folge(f_n) in $C^k[a,b]$ ist gleichbedeutend mit der gleichmäßigen Konvergenz aller Ableitungen von f der Ordnung $\leq$ k.

(v) $(C^k[-1,1], \|.\|_1)$ bzw. $(C^k[-1,1], \|.\|_2)$ sind nicht vollständig, wobei

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(t)|\,dt \quad \text{bzw. } \|f\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^{1} |f(t)^2|\,dt} \quad \text{(vgl. (vii))}$$

(vi) Für $1 \leq p < \infty$ wird der Folgenraum l_p erklärt durch

$$l_p = \{ x = (x_j)_{j\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{K} \mid \|x\|_p := \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |x_j|^p} < \infty\}$$

definiert. l_p ist Vektorraum.

Für $1 < p < \infty$ setzt man $q = \dfrac{p}{p-1}$; für $x = (x_j) \in l_p$, $y = (y_j) \in l_q$ gilt dann

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q \quad \text{(Höldersche Ungleichung).}$$

Für jedes $1 \leq p < \infty$ ist l_p vollständig, also Banachraum.
Für $1 < r < p < \infty$ gelten die Ungleichungen $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \|x\|_r \leq \|x\|_1$, und es gelten die echten Inklusionen $l_1 \subset l_r \subset l_p \subset l_\infty$.

(vii) Für eine meßbare (zum Beispiel offene oder kompakte) Menge $A \subset R^+$ und $1 \leq p \leq \infty$ setzt man

$M_p(A) := \{f : A \to \mathbf{K} \mid f \text{ ist meßbar und } |f|_p < \infty\}$, wobei

$$|f|_p = \sqrt[p]{\int_A |f(t)|^p\,dt} \quad \text{für } 1 \leq p < \infty \text{ und}$$

$$|f|_\infty = \inf\{C > 0: \{x \in A: |f(x)| > C \text{ ist Nullmenge}\}$$

$M_p(A)$ heißt Raum der wesentlich beschränkten Funktionen auf A.
{f heißt meßbar, wenn $f^{-1}(U)$ meßbar ist für jede offene Menge $U \subset \mathbf{K}$)
$M_p(A)$ ist Vektorraum und $|\ |_p$ eine Halbnorm auf $M_p(A)$.

Es ist $\mathcal{O} = \{f \in \mathcal{M}_p(A) : |f|_p = 0\} = \{f: A \to \mathbf{K} \mid f(x) = 0$ fast überall$\}$ ein Unterraum von $\mathcal{M}_p(A)$.
Auf dem Quotientenraum $L_p(A) = \mathcal{M}_p(A) / \mathcal{O}$ wird dann durch $|||\, f\, |||_p = \|f + \mathcal{O}!\|_p = |f|_p$ eine Norm definiert.

Für $1 \le p < \infty$ ist $C_C(\mathbf{R}^N)$ (genauer: die Menge der Restriktionen von Funktionen aus $C_C(\mathbf{R}^N)$ auf A) dicht in $L_p(A)$; dabei bezeichnet $C_C(\mathbf{R}^N)$ den Raum aller stetigen Funktionen f: $\mathbf{R}^N \to \mathbf{K}$ mit kompakten Träger supp f:= $\overline{\{x \in R^N : f(x) \neq 0\}}$. Daher ist zum Beispiel $L_p[a,b]$ eine Vervollständigung von $(C[a,b], \|.\|_p\}$.
Für $f \in L_p(A)$, $g \in L_q(A)$ und $1 \le p, q \le \infty$ mir $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $(1/\infty = 0)$ folgt $fg \in L_1(A)$, und $\|f\, g\|_1 \le \|f\|_p\, \|g\|_q$ (Höldersche Ungleichung)

Definition 1.7: Zwei Normen $\|\ \|$ und $|\ |$ auf einem normierten Raum E heißen äquivalent, wenn es eine Konstante $C \ge 1$ gibt, mit

$$\frac{1}{C}|x| \le \|x\| \le C\,|x| \quad \forall\, x \in E.$$

Äquivalente >Normen definieren die gleiche Topologie.

Satz 1.8. Ist E ein **endlichdim**. **K** – Vektorraum, so sind zwei Normen auf E äquivalent, und E ist mit jeder Norm ein Banachraum.

Folgerung 1.9. Jeder endlichdim. Unterraum eines normierten Raumes ist abgeschlossen.

Satz 1.10. Es sei E ein normierter Raum. Dann ist E endlichdim. genau dann, wenn die abgeschlossene Einheitskugel $B = \{x \in E: \|x\| \le 1\}$ kompakt ist.

2. Stetige lineare Abbildungen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit stetigen linearen Abbildungen zwischen normierten Räumen, deren Untersuchung ein zentraler Gegenstand der Funktionalanalysis ist. Es gilt die folgende Charakterisierung:

Satz 2.1 Für eine lineare Abbildung A: $E \to F$ zwischen den normierten Räumen E, F sind äquivalent:
(i) A ist stetig in 0.
(ii) A ist gleichmäßig stetig.
(iii) Es gibt ein $C > 0$ mit $\|Ax\| \le C\|x\|$ $\forall\, x \in E$.

Definition 2.2 Es seien E, F normierte Räume
(i) Mit L(E, F) wird die Menge aller stetigen linearen Abbildungen A: $E \to F$ bezeichnet; die Elemente von L(E,F) nennt man auch (beschränkte) Operatoren. Speziell schreibt man L(E) := L(E, E) und E' := L(E, **K**). E' heißt Dualraum von E, die Elemente von E' nennt man stetige lineare Funktionale auf E.
(ii) Für $A \in L(E,F)$ bezeichnet $N(A) := A^{-1}(\{0\})$ den Kern von A und R(A):= A(E) das Bild von A. Eine lineare Bijektion A: $E \to F$ heißt Isomorphismus, wenn A und A^{-1} stetig sind; gilt darüberhinaus $\|Ax\| = \|x\|$, $x \in E$, so heißt A isometrischer Isomorphismus.

(iii) Für $A \in L(E,F)$ wird die Operatornorm $\|A\|$ erklärt durch

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\|.$$

Bemerkung 2.3: Für normierte Räume E, F ist L(E, F) ein Vektorraum, und die Operatornorm definert eine Norm auf L(E, F). Für $A \in L(E, F)$ gleten

(i) $\|A\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| = \inf \{C > 0 \mid \|Ax\| \le C\|x\| \ \forall\, x \in E\}$

(ii) $\|Ax\| \le \|a\| \, \|x\| \ \ \forall\, x \in E$

Satz 2.4. Es seien E ein normierter Raum und F ein Banachraum. Dann ist L(E, F) mit der Operatornorm ein Banachraum. Speziell ist E' stets vollständig.

Bemerkung 2.5: Es seien E, F G normierte Räume und $A \in L(E,F)$, $B \in L(F, G)$. Dann ist die Komposition $B\,A := B \circ A \in L(E, G)$, und es gilt $\|B\,A\| \le \|B\| \, \|A\|$.

Beispiele 2.6:

(i) Der Rechts – Shift: $R(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2 ,...)$ definiert für $1 \le p \le \infty$ einen beschränkten Operator $R \in L(l_p)$. R ist eine injektive Isometrie, aber nicht surjektiv.
Ebenso definiert der Links – Shift $L(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$ einen surjektiven, nicht injektiven Endomorphismus $L \in L(l_p)$.

(ii) Es sei $(\alpha_n)_{n\in \mathbf{N}}$ eine beschränkte Folge in **K**. Dann definiert der Diagonaloperator $D(x_n) = (\alpha_n x_n)$ einen beschränkten Operator $D \in L(l_p)$ für $1 \le p \le \infty$, und es gilt $\|D\| = \sup_n |\alpha_n|$.

(iii) Es sei $(a_{i,j})_{i,j\in \mathbf{N}}$ eine unendliche (reelle oder komplexe) Matrix mit $\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2 < \infty$. Wir erklären $A\colon l_2 \to l_2$ durch $A(x_j) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} x_j\right)_i$. Es gilt $A \in L(l_2)$ und $\|A\| \le \left(\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

(iv) Die Integrationsabbildung $S\colon C[a,b] \to \mathbf{K}$, $S(f) = \int_a^b f(t)dt$ definiert ein stetiges lineares Funktional $S \to (C[a,b])'$ mit $\|s\| = b - a$.

(v) Für einen stetigen Kern $k \in C([a,b] \times [a,b])$ betrachten wir den Integraloperator $K\colon C[a,b] \to C[a,b]$ erklärt durch $(Kf)(x) = \int_a^b k(x, y) f(y) dy$, $f\in C[a,b]$.
Für $x \in [a,b]$ gilt $|Kf(x)| \le \|f\|_\infty \sup_{x\in[a,b]} \int_a^b |k(x, y)| dy$. Damit ist $K \in L(C[a,b])$.

(vi) Für k wie in (v) wird durch $V f(x) = \int_a^x k(x, y) f(y) dy$ ein "Vodterra – Integraloperator" $V \in L(C[a,b])$ definiert.

(vii) Der Operator K aus (v) läßt sich auch als Operator auf $L_2[a,b]$ betrachten. Wegen der Hölderschen Ungleichung ist $K \in L(L_2[a,b])$.
Allgemeiner gilt dies auch für $k \in L_2([a,b] \times [a,b])$.

(viii) Für $\phi \in C[a,b]$ definiert der Multiplikationsoperator $M_\phi = \phi\, f$, $f\in C[a,b]$, einen beschränkten Operator $M_\phi \in L(C[a,b])$ mit $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$.

(ix) Die Differentiation D: $(C_1[a,b], \| \|_\infty) \to (C_1[a,b], \| \|_\infty)$, D(f) = f' ist eine unstetige lineare Abbildung. Dagegen ist
D: $(C_1[a,b], \|.\|_{C^1}) \to (C_1[a,b], \| \|_\infty)$ stetig mit $\|D\| = 1$

Bemerkung 2.7 Es sei F ein abgeschlossener Unterraum des normierten Raumes E. Auf dem Quotientenraum E/F wird dann durch

$$\|[x]\| := \inf_{y\in F}\|x + y\| = \inf_{y\in F}\|x - y\| = \mathrm{dist}(x, F),\ [x] := x + F \in E/F$$

eine Norm erklärt, die man als induzierte Quotientennorm bezeichnet (ist $\| \|$ nur eine Halbnorm auf E, so erhält man eine Halbnorm auf E/F). Die Quotientenabbildung q: E $\to$ E/F ist linear und stetig mit $\|q\| \le 1$; q ist offen. Ist E Banachraum, so ist auch E/F Banachraum.

Satz 2.8.: Es seien E, G normierte Räume, F ein abgeschlossener Unterraum von E und q: E $\to$ E/F die Quotientenabbildung. Zu jedem $A \in L(E, G)$ mit $F \subset N(A)$ gibt es genau ein $A' \in L(E/F, G)$ mit $A = A' \circ q$, und es gilt $\|A\| = \|A'\|$.

I. OPERATOREN IN HILBERTRÄUMEN

3. Hilberträume und ihre Geometrie

Definition 3.1. Ein Skalarprodukt (oder inneres Produkt) auf einem **K**-Vektorraum E ist eine Abbildung $<.>: E \times E \to \mathbf{K}$ mit folgenden Eigenschaften:

(S1) $<\alpha x + \beta y,z> = \alpha<x,z> + \beta<y,z> \quad \forall\ \alpha,\beta \in \mathbf{K},\ x, y, z \in E.$

(S2) $< x, y > = \overline{< x, y >} \quad \forall\ x, y \in E$

(S3) $<x,x> \ge 0\ \ \forall\ x \in E$ und $<x,x> = 0$ nur für $x = 0$.

Gelten (S1), (S2), und anstelle (S3) nur $<x,x> \ge 0\ \forall\ x \in E$, so bezeichnet man <.,.> als ein Halbskalarprodukt auf E.

Lemma 3.2 Ist E ein **K**-Vektorraum und <.,.> ein Halbskalarprodukt auf E, so setzt man $\|x\| := \sqrt{< x, x >}$, $x \in E$. Dafür gelten:

(i) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}<x,y> + \|y\|^2 \quad \forall\ x, y \in E$

(ii) $|<x,y>| \le \|x\|\,\|y\| \quad \forall\ x, y \in E$ (Cauchy – Schwarzsche Ungleichung)

(iii) $\|.\|$ ist eine Halbnorm auf E. Ist |.,.| ein Skalarprodukt, so ist $\|.\|$ eine Norm.

(i) Für jedes $y \in E$ ist $\Phi(x) = <x,y>$ ein stetiges lineares Funktional auf $(E,\|.\|)$.

Definition 3.3. Einen **K** Vektorraum E mit einem Skalarprodukt <.,.> bezeichnet man als einen Prähilbertraum; dieser wird stets als normierter Raum mit der Norm $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ aufgefaßt. Ein vollständiger Prähilbertraum heißt Hilbertraum. Hilberträume sind also Banachräume, bei denen die Norm durch ein Skalarprodukt erzeugt wird.

Lemma 3.4. In einem Prähilbertraum gelten für alle $x, y \in E$ die Parallelogrammgleichung (i) und die Polarisationsgleichung (ii).

(i) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

(ii) $<x,y> = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) + \frac{i}{4}(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2)$ falls $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

$<x,y> = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$ falls $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.

Umgekehrt gilt: Ist E ein normierter Raum, dessen Norm die Parallelogrammgleichung (i) erfüllt, so definiert (ii) ein Skalarprodukt, das die gegebene Norm induziert.

Beispiele 3.5 (i) $\mathbf{K}^N$ ist Hilbertraum mit dem Skalarprodukt <x,y> = $\sum_{j=1}^{N} x_j \overline{y_j}$; die zugehörige Norm ist die euklidische Norm $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} |x_j|^2}$

(ii) l_2 ist Hilbertraum mit dem Skalarprodukt <x,y> = $\sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}$. Denn nach der Hölderschen Ungleichung ist die Reihe absolut konvergent und definiert daher ein Skalarprodukt mit der Norm $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2}$.

(iii) Für eine beliebige Menge $I \neq \emptyset$ kann allgemeiner
$l_2(I) = \{(x_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^I \mid (|x_i|^2)_{i\in I}$ ist summierbar$\}$
betrachten; $l_2(I)$ ist Hilbertraum mit dem Skalarprodukt <x,y> = $\sum_{i\in I} x_i \overline{y_i}$. Man benötigt den Begriff der Summierbarkeit für eine (i.a. nicht abzählbare) Familie.

(iv) C[a,b] ist Prähilbertraum mit dem Skalarprodukt <f, g> = $\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt$, aber kein Hilbertraum.

(v) Für eine meßbare Menge $A \subset \mathbf{R}^N$ ist $L_2(A)$ Hilbertraum mit dem Skalarprodukt <f,g> = $\int_A f(t)\overline{g(t)}\,dt$.

(vi) Die Räume C([a,b]) und $L_p([a,b])$, l_p für $p \neq 2$ sind mit ihren Normen keine Hilberträume.

(vii) Jeder abgeschlossene Unterraum eines Hilbertraumes ist ein Hilbertraum.

Satz 3.6(Bestapproximation). Es sei E ein Hilbertraum und $\emptyset \neq A \subset E$ eine konvexe und abgeschlosse Teilmenge (etwa ein abgeschlossener Unterraum). Dann gibt es zu jedem $x \in E$ genau ein $x_0 \in A$ mit
$\|x - x_0\| = \operatorname{dist}(x, A) := \inf\{ \|x - y\| : y \in A\}$.
Der vorstehende Satz gilt nicht für Prähilberträume E. Betrachte zum Beispiel für $E = (C[-1,1], \|\ \|_2)$ den abgeschlossenen Unterraum $A = \{f \in E: f_{|[-1,0]} = 0\}$; für f = 1 $\in E$ gilt dann dist (f, A) = 1, aber $\|f - g\|_2 > 1$ für alle $g \in A$.

Definition 3.7. (i) Für einen abgeschlossenen Unterraum F des Hilbertraumes E heißt die Abbildung P_F: $E \to E$ erklärt durch $P_F(x) := x_0$ wobei $x_0 \in F$ und $\|x - x_0\| = \operatorname{dist}(f,A)$ die orthogonale Projektion von E auf F.

(ii) Es sei E ein Prähilbertraum. $x, y \in E$ heißen orthogonal, in Zeichen $x \perp y$, wenn <x,y> = 0. Für $M \subset E$ bezeichnet $M^\perp = \{x \in E \mid x \perp y\ \forall\, y \in M\}$ den Orthogonalraum von M. $M \perp N$ bedeutet $x \perp y$ für alle $x \in M$, $y \in N$; man schreibt auch $x \perp M$ statt $\{x\} \perp M$.

Bemerkungen 3.8. (i) Ist E ein Prähilbertraum, so ist für $M \subset E$ wegen der Stetigkeit des Skalarproduktes $M^\perp$ stets ein abgeschlossener Unterraum von E.

(iii) Sind M, N Unterräume des Prähilbertraumes E mit $M \perp N$ und $M + N = E$, so folgt $N = M^\perp$.

(iv) Für orthogonale Elemente $x, y \in E$ gilt wegen 3.2 (i) der Satz von Pythagoras $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Satz 3.9. (i) Es sei F ein Unterraum des Prähilbertraumes E. Dann gilt für $x \in E$ und $x_0 \in F$ genau dann $\|x - x_0\| = \operatorname{dist}(x, F)$, wenn $x - x_0 \in F^\perp$.

(ii) Ist F abgeschlossener Unterraum des Hilbertraumes E, so gilt
$E = F \oplus F^\perp$ als orthogonale direkte Summe. Für $x \in E$ ist
$x = P_F x + (x - P_F x)$ die Zerlegung mit $P_F x \in F$ und $x - P_F x \in F^\perp$. Es gilt
$x_0 = P_F x$ genau dann, wenn $x - x_0 \in F^\perp$.
(iii) Es gilt $P_F \in L(E)$ mit $\|P_F\| = 1$ wenn $F \neq \{0\}$, und $P_F|_F = id_F$, $P_F|_{F^\perp} = 0$, $P_F^2 = P_F$, sowie $\langle P_F x, y\rangle = \langle x, P_F y\rangle \ \forall\, x, y \in E$.

4.Orthonormalbasen in Hilberträumen

Definition 4.1. Es sei $I \neq \emptyset$ eine Menge und E ein Prähilbertraum.
(i) Eine Familie $(e_i)_{i\in I}$ in E heißt ein Orthonormalsystem (kurz ONS), wenn $\langle e_i,e_j\rangle = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in I$; dabei ist $\delta_{ij} = 1$ wenn $i = j$ und $\delta_{ij} := 0$ wenn $i \neq j$.
Für $x \in E$ heißen dann die Zahlen $\hat{x}(i) := \langle x, e_i\rangle$, $i \in I$, die Fourier – Koeffizienten von x bzgl. (e_i).
(ii) Ein Orthonormalsystem $(e_i)_{i\in I}$ in E heißt eine Orthonormalbasis (kurz ONB) oder vollständiges Orthonormalsystem in E, wenn $\{e_i : i \in I\}$ total in E ist das heißt $\operatorname{span}\{e_i: i \in I\}$ dicht in E ist.

Beispiele 4.2 (i) Einheitsvektoren $(e_n)_{n\in \mathbf{N}}$ sind eine Orthonormalbasis in l_2.
(ii) Für $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ bilden die Funktionen $e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$, $n \in \mathbf{Z}$, ein vollständiges Orthonormalsystem im Hilbertraum $L_2[0, 2\pi]$.
(iii) Durch Orthonormalisierung der Monome 1, t, t^2, t^3, ... in $L_2[-1, 1]$ nach Gram-Schmidt erhält man das vollständige Orthonormalsystem $\left\{\sqrt{\frac{2n+1}{2}}p_n : n \in N_0\right\}$ in $L_2[-1, 1]$, wobei $p_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dt}\right)^n [(t^2-1)^n]$, da n-te Legendre – Polynom ist. (Diese Polynome lösen auch die Legendresche Differentialgleichung: $(1 - t^2)y'' - 2ty' + n(n+1)y = 0$, $n \in \mathbf{N}_0$.
(iv) Durch Orthonormalisierung der Funktionen $t^n e^{-\frac{t^2}{2}}$, $n \in N_0$, in $L_2(\mathbf{R})$ erhält man das Orthonormalsystem $\left\{(2^n n!\sqrt{\pi})^{-1/2} e^{-x^2/2} h_n(t)\right\} n \in \mathbf{N}_0$, der Hermiteschen Funktionen in $L_2(\mathbf{R})$, wobei $h_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \left(\frac{d}{dt}\right)^n e^{-t^2}$ das n – te Hermitesche Polynom bezeichnet.
(v) Eine Funktion $f: \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ heiße fastperiodisch, wenn sie gleichmäßig auf $\mathbf{R}$ durch Funktionen der Form $\sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda_k t}$, $c_k \in \mathbf{C}$, $\lambda_k \in \mathbf{R}$, approximiert werden kann. Man kann zeigen: $\langle f,g\rangle := \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\overline{g(t)}dt$ definiert ein Skalarprodukt.
Der Raum der fast period. Fkt. ist Prähilbertraum mit der Norm $|f| = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt \leq \|f\|_\infty$. Die Funktionen $(e^{i\lambda t})$ bilden ein überabzählbares ONS.

Bemerkung 4.3: Es sei $I \neq \emptyset$ eine beliebige Menge. Eine Familie $(x_i)_{i\in I}$ in einem normierten Raum E heißt summierbar mit Summe $x \in E$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $M_0 \subset I$ gibt, so daß für jedes endliche M mit $M_0 \subset M \subset I$ gilt: $\| x - \sum_{i\in M} x_i \| \le \varepsilon$. In diesem Fall ist x eindeutig bestimmt, und man schreibt $x = \sum_{i\in M} x_i$. Es ist dann $\{i : x_i \neq 0\}$ höchstens abzählbar, und für jede Abzählung $x_1, x_2, \ldots$ dieser $x_i \neq 0$ gilt $x = \lim_n \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$.

Im Fall $E = \mathbf{K}$ ist somit die Summierbarkeit von $(x_i)_{i\in I}$ äquivalent zu der Summierbarkeit von $(|x|_i)_{i\in I}$ und damit äquivalent zu der Bedingung

$$\sup\{ \sum_{i\in M} x_i : M \subset I, M \text{ endlich}\} < \infty.$$

Satz 4.4 (Besselsche Ungleichung). Für jedes Orthonormalsystem $(e_i)_{i\in I}$ im Prähilbertraum E und $x \in E$ ist $\left(|\hat{x}(i)|^2\right)_{i\in I}$ summierbar, und es gilt $\sum_{i\in I} |\hat{x}(i)|^2 \le \|x\|^2 \quad \forall\, x \in E$.

Auf Grund der Besselschen Ungleichung ist für jedes Orthonormalsystem $(e_i)_{i\in I}$ im Prähilbertraum E die lineare Abbildung $G: E \to l_2(I)$, $x \to \left(\hat{x}(i)\right)_{i\in I}$ erklärt, und es gilt $\|G\| \le 1$.

Satz 4.5. Für jedes Orthonormalsystem $(e_i)_{i\in I}$ im Hilbertraum E ist die Abbildung $G: E \to l_2(I)$, $x \to \left(\hat{x}(i)\right)_{i\in I}$, surjektiv. Für $y = (y_i)_{i\in I} \in l_2(I)$ ist $(y_i e_i)_{i\in I}$ in E summierbar, und es gilt $G\left(\sum_{i\in I} y_i e_i\right) = y$.

Folgerung 4.6 Es sei E ein Hilbertraum und $(e_i)_{i\in I}$ ein Orthonormalsystem in E. Für jedes $x \in E$ ist dann $Px = \sum_{i\in I} \hat{x}(i) e_i$ die orthogonale Projektion von x auf den abgeschlossenen Unterraum $F := \overline{\operatorname{span}\{e_i : i \in I\}}$.

Satz 4.7 Für jedes Orthonormalsystem $(e_i)_{i\in I}$ im Hilbertraum E sind äquivalent:

(i) $(e_i)_{i\in I}$ ist eine Orthonormalbasis

(ii) Für jedes $x \in E$ gilt $x = \sum_{i\in I} \hat{x}(i) e_i$

(iii) Für jedes $x \in E$ gilt die Parsevalsche Gleichung $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\hat{x}(i)|^2$.

(iv) Für alle $x, z \in E$ gilt $\langle x,z\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle\langle e_i, z\rangle$.

(v) Die Abbildung $G: E \to l_2(I)$ ist isometrisch.

(vi) Die Abbildung $G: E \to l_2(I)$ ist injektiv.

(vii) $(e_i)_{i\in I}$ ist maximales Orthonormalsystem, das heißt: $\{e_i : i \in I\}^\perp = \{0\}$.

Beispiel 4.8: Für die Orthonormalbasis $(e_n)_{n\in \mathbf{Z}}$ in $L_2[0, 2\pi]$ gilt:

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int} = \sum_{-\infty}^{\infty} (f, e_n) e_n, \text{wobei} \quad \hat{f}(n) = \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt,\ n \in \mathbf{Z}$$

den n-ten Fourierkoeffizienten bezeichnet.

Satz 4.9. Jedes Orthonormalsystem $(e_i)_{i\in I}$ in einem Hilbertraum E läßt sich zu einer Orthonormalbasis von E erweitern.

Bemerkungen 4.10. (i) Jeder Hilbertraum $E \neq \{0\}$ besitzt eine Orthonormalbasis.

(ii) Jeder Hilbertraum E ist durch G isometrisch isomorph zu $l_2(I)$, wobei I die Kardinalität einer Orthonormalbasis bezeichnet.

(iii) Ein Hilbertraum E ist genau dann separabel (das heißt besitzt eine abzählbare dichte Teilmenge), wenn eine und damit jede Orthonormalbasis (vgl. (v)) von E abzählbar ist. in diesem Fall gilt $E \cong l_2$ isometrisch isomorph vermöge G.
(iv) Speziell gilt $L_2[0, 2\pi] \cong l_2$ isometrisch isomorph.
(v) Je zwei Orthonormalbasen eines Hilbertraumes E haben die gleiche Kardinalität; man bezeichnet diese Kardinalität als die Hilbertraumdimension von E.

Beispiel 4.11: Es sei E ein seperabler Hilbertraum mit Orthonormalbasis $\{e_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ und G: $E \to l_2$ der zugehörige Isomorphismus. Dann ist

$$Ax = A\left(\sum_{k=0}^{\infty} \hat{x}(k)e_k\right) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} < Ae_k, e_l > \hat{x}(k)\right)e_l .$$

Somit ist $GA!G^{-1} \in L(l_2)$ gegeben durch die Matrix $a_{lk} = <Ae_k, e_l>$.

5. Operatoren in Hilberträumen

Satz 5.1 (Riezscher Darstellungssatz). Es sei E ein Hilbertraum. Dann gibt es zu jedem $\phi \in E'$ genau ein $y \in E$ mit

$\phi(x) = <x, y> \quad \forall\, x \in E$, und es gilt $\|\phi\| = \|y\|$.

Satz 5.2: Es seien E, F Hilberträume und $A \in L(E, F)$. Dann gibt es genau eine Abbildung $A^*: F \to E$ mit

$<Ax, y> = <x, A^*y> \quad \forall\, x \in E, y \in F$.

Es gilt $A^* \in L(F,E)$ und $\|A^*\| = \|A\|$. Weiter gelten $A^{**} = A$ und $\|A^*A\| = \|A\|^2$.

Bemerkung 5.3: Für $A, B \in L(E,F)$, $C \in L(F, G)$ und $\alpha \in \mathbf{K}$ gelten die offensichtlichen Rechenregeln

$(A + B)^* = A^* + B^*$, $(\alpha A)^* = \overline{\alpha}A^*$, $(CA)^* = A^*C^*$.

Mit A ist auch A^* Isomorphismus, und es gilt $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Definition 5.4: Der Operator A^* aus 5.2 heißt der zu A adjungierte Operator. Man nennt
(i) $A \in L(E)$ selbstadjungiert, wenn $A = A^*$
(ii) $A \in L(E, F)$ unitär, wenn A Isomorphismus ist und $A^{-1} = A^*$.
(iii) $A \in L(E)$ normal, wenn $A^*A = AA^*$.

Dies verallgemeinert die entsprechenden Begriffe für Matrizen aus der Linearen Algebra.

Beispiele 5.5 (i) Für die Shift – Operatoren $L, R \in L(l_2)$ aus Beispiel 2.6 (i) gilt $R^* = L$ und $L^* = R$. Somit ist $R^*R = LR = I \neq RL = RR^*$ (für L analog), d.h. L, R sind nicht normal. Insbesondere ist der Rechts-Shift R Isometrie, aber nicht unitär.
(ii) Für $\phi \in C[a, b]$ (oder $\phi \in L_\infty[a, b]$) sei $M_\phi f = \phi f$ der Multiplikationsoperator $M_\phi \in L(L_2[a, b])$. Dann gilt $(M_\phi)^* = M_{\overline{\phi}}$, und M_ϕ ist stets normal. M_ϕ ist selbstadjungiert genau dann, wenn ϕ reellwertig (f.ü.) ist, und unitär genau dann, wenn $|\phi| = 1$ (f.ü.) ist.
(iii) Es sei $K \in L(L_2[a,b])$ der Integraloperator aus 2.6 (vii) mit der Kernfunktion $k(x,y) \in L_2([a,b]^2)$. Dann ist der adjungierte Operator K^* ein Integraloperator mit der Kernfunktion $k^*(y,x) = \overline{k(x, y)}$ (f.ü.).
(iv) Es sei E seperabler Hilbertraum mit der Orthonormalbasis $\{e_k\}_{k\in\mathbf{N}}$, und $A \in L(E)$ wie in 4.11 gegeben durch die Matrix $a_{lk} = <Ae_k, e_l>$. Dann gilt für die Matrix (a_{lk}^*) von A^* die Beziehung

$a_{lk}^* = \overline{a_{kl}}$.

Satz 5.6: Es seien E, F Hilberträume und $A \in L(E, F)$. Dann gelten:

(i) $R(A)^{\perp} = N(A^*)$.

(ii) $\overline{R(A)} = N(A^*)^{\perp}$.

(iii) Ist R(A) abgeschlossen, so gilt $R(A) = N(A^*)$.

(iv) Gibt es $\gamma > 0$, so daß $\|Ax\| \geq \gamma \|x\| \; \forall \, x \in N(A)^{\perp}$, so ist R(A) abgeschlossen.

Satz 5.7 Es sei E ein Hilbertraum.

(i) Es sei $F \subset E$ abgeschlossener Unterraum und $P \in L(E)$ die orthogonale Projektion von E auf F. Dann gilt $P^* = P = P^2$.

(ii) Jedes $P \in L(E)$ mit $P^* = P = P^2$ ist orthogonale Projektion, und zwar auf den abschlossen Unterraum $F = R(P) = N(I - P)$.

Satz 5.8. Für einen selbstadjungierten Operator $A \in L(E)$ im Hilbertraum E gelten:

(i) $\langle Ax, x\rangle \in \mathbf{R} \;\; \forall \, x \in E$.

(ii) $\|A\| = \sup \{|\langle Ax,x\rangle| : \|x\|=1\}$.

Bemerkungen 5.9 (i) Man kann zeigen, daß für einen komplexen Hilbertraum E und $A \in L(E)$ aus 5.8 (i) folgt, daß A selbstadjungiert ist.

(ii) Für $A \in L(l_2)$ erklärt durch $A(x_1, x_2, x_3, ...) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, -x_6, ...)$ gilt $A^* = -A$ (und $A^2 = - I$). Im Fall $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ gilt hingegen $\langle Ax, x\rangle = 0$ für jedes $x \in l_2$ wegen $\langle Ax, x\rangle = x, A^*x\rangle = - \langle x, Ax\rangle$. Dies zeigt, daß (i) nicht im Fall $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.

(iii) Ein selbstadjungierter Operator A im Hilbertraum ist stets eindeutig bestimmt durch seine quadratische Form $x \to \langle Ax, x\rangle$.

6. Kompakte Operatoren

Satz 6.1 Für einen metrischen Raum X sind äquivalent:

(i) X ist kompakt

(ii) X ist folgenkompakt

(iii) X ist präkompakt und vollständig

Folgerung 6.2 Für eine Teilmenge $M \subset X$ eines vollständigen metrischen Raumes X sind äquivalent:

(i) M ist relativ kompakt

(ii) Jede Folge in M hat eine in X konvergente Teilfolge

(iii) M ist präkompakt

Definition 6.3 Es seien E, F normierte Räume und $U = U_E = \{x \in E: \|x\| \leq 1\}$. Eine lineare Abbildung $A: E \to F$ heißt kompakt, wenn A(U) relativ kompakt in F ist. Es bezeichne K(E, F) die Menge der kompakten Operatoren von E nach F und $K(E) := K(E, E)$.

Bemerkung 6.4 Für normierte Räume D, E, F, G gelten:

(i) K(E, F) ist ein Unterraum von L(E, F).

(ii) Für $A \in K(S, F)$, S(D, E), $T \in L(F, G)$ ist $TAS \in K(D, G)$.

Satz 6.5 Für normierte Räume E, F ist K(E, F) in L(E, F) abgeschlossen, wenn F Banachraum ist.

Insbesondere ist K(F) ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal in L(F), wenn F Banachraum ist.

Beispiele 6.6. (i) Für einen normierten Raum E ist die Identität Id_E genau dann kompakt, wenn $\dim(E) < \infty$.

(ii) Operatoren endlichen Ranges sind kompakt. man schreibt dafür

$$G(E, F) := \{A \in L(E, F) : \dim R(A) < \infty\}.$$

(iii) Der Diagonaloperator $D \in L(l_2)$, $D(x_j) = (\alpha_j x_j)$ mit $(\alpha_j) \in l_\infty$ ist genau dann kompakt, wenn $(\alpha_j) \in c_0$.

Satz 6.7 (von Arzelà-Ascoli). Es sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Dann ist eine Teilmenge $M \subset C(X)$ genau dann relativ kompakt, wenn (i) und (ii) gelten:

(i) M ist gleichmäßig beschränkt, das heißt es gilt: $\sup_{f\in M}\sup_{x\in X}|f(x)| < \infty$.

(ii) M ist gleichgradig stetig, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $x \in X$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle $y \in X$ mit $d(x,y) < \delta$ und alle $f \in M$ gilt: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Beispiele 6.8 Für einen stetigen Kern $k \in C([a,b] \times [a,b])$ betrachten wir den Integraloperator

erklärt durch $(Kf)(x) = \int_a^b k(x,y)f(y)dy$.

(i) $K: C[a,b] \to C[a,b]$ ist ein kompakter Operator.

(ii) $K: L_2[a,b] \to C[a,b]$ ist auch kompakter Operator.

(iii) $K: L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ ist auch kompakter Operator.

(iv) Für $k \in L_2([a,b]^2)$ ist ebenfalls $K: L_2[a,b] \to [a,b]$

Definition 6.9 Es sei E ein normierter Raum und $A \in L(E)$. Eine Zahl $\lambda \in \mathbf{K}$ heißt Eigenwert von A, wenn $E_\lambda := N(\lambda I - A) \neq \{0\}$. E_λ heißt dann Eigenraum von A zum Eigenwert λ, die Elemente von $E_\lambda \setminus \{0\}$ heißen Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ. Die Menge der Eigenwerte von A wird auch Punktspektrum genannt und mit $\sigma_p(A)$ bezeichnet.

Beispiele 6.10 (i) Der Volterra – Operator $V \in L(L_2[0,1])$, $Vf(x) = \int_0^x f(t)dt$ ist kompakt, hat aber keine Eigenwerte.

(ii) Der Rechts-Shift R aus 2.6 (i) hat keine Eigenwerte.

(iii) Der Diagonaloperator aus 2.6 (ii) hat genau die Eigenwerte α_n, $n \in \mathbf{N}$.

Satz 6.11 Es sei E ein Banachraum und $A \in K(E)$. Dann ist $\dim N(I - A) < \infty$.

7. Kompakte selbstadjungierte Operatoren

Satz 7.1 (i) Ist $A \in L(H)$ normal, so gilt $N(A - \lambda I) = N(A^* - \bar{\lambda} I)$. Für Eigenwerte $\lambda \neq \mu$ von A gilt $N(A - \lambda I) \perp N(A - \mu I)$.

(ii) Ist $A \in L(H)$ selbstadjungiert, so sind alle Eigenwerte von A reell.

Satz 7.2 Es sei $(e_n)_{n\in \mathbf{N}_0}$ ein Orthonormalsystem im Hilbertraum H und $(\lambda_n)_{n\in \mathbf{N}_0}$ eine reelle Nullfolge. Dann definiert

$$Ax = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n < x, e_n > e_n\,,\; x \in H$$

einen kompakten und selbstadjungierten Operator, und die Reihe konvergiert in der Operatornorm. Darüber hinaus gilt $\sigma_p(A) \setminus \{0\} = \{\lambda_n : \lambda_n \neq 0\}$, und für $\lambda_n \neq 0$ gilt $N(\lambda_n I - A) = \operatorname{span}\{e_j : \lambda_j = \lambda_n\}$.

Lemma 7.3 Es sei $A \in L(H)$ kompakt und selbstadjungiert. Dann ist $\|A\|$ oder $-\|A\|$ ein Eigenwert von A.

Satz 7.4 (Spektralsatz) Es sei H ein unendlichdimensionaler Hilbertraum und $A \in L(H)$ kompakt und selbstadjungiert. Dann gibt es eine reelle Nullfolge $(\lambda_n)_{n\in \mathbf{N}_0}$ mit fallenden Beträgen und ein Orthonormalsystem $(e_n)_{n\in \mathbf{N}_0}$ in H, so daß

$$Ax = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n < x, e_n > e_n\,, \qquad x \in H.$$

Bemerkungen 7.5 (i) In einer Darstellung für $A = A^* \in K(H)$ wie in 7.4 ist die Folge (λ_n) (ggf. bis auf die Reihenfolge) eindeutig bestimmt. Dabei ist $\dim R(A) < \infty$ genau dann wenn $\lambda_n = 0$ für $n \geq n_0$ (7.2). Ferner tritt wegen 7.2 jedes $\lambda_n \neq 0$ genau m_n mal auf, wobei $m_n := \dim N(\lambda_n I - A)$ die **geometrische Vielfachheit** von λ_n bezeichnet. Diese stimmt überein mit der **algebraischen Vielfachheit** von λ_n, d.h. der Dimension des **Hauptraumes** $N_{\lambda_n} := \bigcup_{k \in N} \left(N(\lambda_n I - A)^k \right)$.

Jedes Folge $(\lambda_n(A))_n$, die die von Null verschiedenen Eigenwerte von A der algebraischen Vielfachheit nach und mit fallenden Beträgen aufzählt (und ggf. mit Nullen aufgefüllt wird) bezeichnet man als eine Eigenwertfolge von A.

(ii) Der Operator A aus 7.2 ist injektiv genau dann, wenn alle $\lambda_n \neq 0$ sind und (e_n) eine Orthonormalbasis in H ist. Dies ist auch äquivalent zur Dichtheit des Bildes von A (vgl. 5.6) $\overline{R(A)} = N(A)^\perp$

(iii) Ist $A = A^* \in K(H)$, so ist $\sigma_p(A)$ höchstens abzählbar mit 0 als einzigem eventuellen Häufungspunkt. Es gilt $\|A\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(A)\}$.

(iv) Ist A wie in 7.4 und $\sigma_p(A) \setminus \{0\} = \{\mu_i\}$ mit $\mu_i \neq \mu_j$ für $i \neq j$, und ist P_j der orthogonale Projektor auf $N(\mu_i I - A)$, so ist $A = \sum_j \mu_j P_j$ in L(H). Dabei ist $P_i P_j = \delta_{i,j} P_j$ und $\dim R(P_j) < \infty$. Eine solche Darstellung ist (bis auf die Reihenfolge) eindeutig.

Definition 7.6 Ein Operator $A \in L(H)$ heißt positiv (definit), wenn $\langle Ax,x \rangle \geq 0 \ \forall\, x \in H$.

Bemerkungen 7.7 (i) Positive Operatoren sind im Fall **K** = **C** stets selbstadjungiert. Dies gilt nicht im Fall **K** = **R**.

(ii) Operatoren der Form A^*A sind selbstadjungiert und positiv.

(iii) $A = A^* \in K(H)$ ist positiv genau dann, wenn $\lambda_n(A) \geq 0 \ \forall\, n$.

Satz 7.8 Es sei $A = A^* \in K(H)$ positiver Operator. Zu $k \in \mathbf{N}$ gibt es dann genau einen positiven Operator $B = B^* \in K(H)$ mit $B^k = A$; man schreibt $A^{1/k} := B$. Es gilt dann $\lambda_n(A^{1/k}) = \lambda_n(A)^{1/k}$.

Für $A \in K(H,G)$, G, H Hilberträume, nennt man $|A| :=(A^*A)^{1/2} \in K(H)$ den Betrag von A. Diese Bezeichnung ist gerechtfertigt durch den

Satz 7.9 (Polar-Zerlegung). Für $A \in K(H,G)$ gilt $\|Ax\| = \|\, |A|x \,\|$, $x \in H$. Es gibt einen isometrischen Operator U: $\overline{R(|A|)} \to \overline{R(A)}$, mit $A = U|A|$, $|A| = U^{-1}A$.

Satz 7.10 (Schmidt-Darstellung) Zu jedem $A \in K(H, G)$ gibt es eine fallende Nullfolge $(s_n)_{n \in \mathbf{N}0} \subset \mathbf{R}_+$ und Orthonormalsysteme $(e_n)_{n \in \mathbf{N}0}$ in H, $(f_n)_{n \in \mathbf{N}0}$ in G mit

$$Ax = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \langle x, e_n \rangle f_n, \quad x \in H,$$

wobei die Reihe in der Operatornorm konvergiert.

Definition 7.11 In einer Schmidt – Darstellung von $A \in K(H,G)$ wie in 7.10 ist die Folge $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ eindeutig durch A festgelegt, und es gilt

$s_n(A) := s_n = (\lambda_n(A^*A)^{1/2}) = \lambda_n(|A|)$.

Die Folge $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ wird als die Folge der singulären Zahlen von A bezeichnet.

Folgerung 7.12 Für Hilberträume G, H gilt $K(H, G) = \overline{F(G,H)}$ (endl. dim. Bild)

Bemerkung 7.13 Sind E, F Banachräume, so gilt $\overline{F(G,H)} \subset K(E, F)$ wegen 6.5 und 6.6. (ii).

Man definiert, der Banachraum F habe die Approximationseigenschaft (A.E.), wenn die umgekehrte Inklusion für jeden Banachraum E richtig ist. Die meisten der in der Analysis vorkommenden Banachräume F habe diese Eigenschaft. Nach P. Enflo (1973) gibt es aber Banachräume, die die A.E. nicht haben, und nach A. Szankowski (1979) hat $L(l_2)$ die A.E. nicht.

Die singulären Zahlen $s_n(A)$ eines kompakten Operators stimmen mit den sogenannten Approximationszahlen $\alpha_n(A)$ überein, denn es gilt:

Satz 7.14 Für $A \in K(H,G)$ und $n \in \mathbf{N}_0$ gilt

$$s_n(A) = \inf \{\|A - B\| : B \in L(H, G), \dim R(B) \le n\} =: \alpha_n(A).$$

Lemma 7.15 Für die singulären Zahlen kompakter Operatoren auf Hilberträumen gilt:

(i) Für $A \in K(H, G)$ ist $(S_n(A))_{n\in \mathbf{N}0}$ fallende Nullfolge mit $s_0(A) = \|A\|$

(ii) $s_n(\lambda A) = |\lambda| s_n(A)$ und $s_n(A^*) = s_n(A)$ für $A \in K(H,G)$, $\lambda \in \mathbf{K}$.

(iii) $s_{m+n}(A+B) \le s_m(A) + s_n(B)$, $A, B \in K(H,G)$.

(iv) $s_m(SAT) \le \|S\|\, s_m(A)\, \|T\|$, $A \in K(F, G)$, $S \in L(G, H)$, $T \in L(E, F)$.

(v) $s_{m+n}(AB) \le s_m(A)s_n(B)$, $A \in K(F, G)$, $B \in K(E, F)$.

8. Hilbert – Schmidt Operatoren und Spurklasse

Definition 8.1 Es seien G, H Hilberträume. Ein Operator $A \in L(H, G)$ heißt Hilbert – Schmidt Operator, wenn für eine Orthonormalbasis$(e_i)_{i\in I}$ von H gilt

$$(*) \quad |A| := \Big(\sum_{i\in I} \|Ae_i\|^2\Big)^{1/2} < \infty .$$

Bemerkung 8.2 Für Orthonormalbasen $(e_i)_{i\in I}$ in H und $(f_i)_{i\in J}$ in G gilt nach 4.7

$$\sum_i \|Ae_i\| = \sum_{i,j} |< Ae_i, f_j >| = \sum_j \|A^* f_j\|^2.$$

Daher ist (*) unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis, und A ist genau dann Hilbert – Schmidt Operator, wenn dies für A* gilt; in diesem Fall gilt $|A| = |A^*|$.

Beispiel 8.3 Für einen Kern $k \in L_2([a, b]^2)$ ist der durch

$$Kf(x) = \int_a^b k(x, y)f(y)dy$$

erklärte Integraloperator $K \in L(L_2[a,b])$ Hilbert- Schmidt Operator und $|K| = \|k\|_{L2}$.

Satz 8.4 Ein Operator $A \in L(H,G)$ ist genau dann Hilbert-Schmidt Operator, wenn A kompakt ist und $(s_n(A)) \in l_2$ gilt. In diesem Fall ist $|A|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(A)^2 \ge \|A\|^2$.

Bemerkung 8.5 Für Integraloperatoren wie in 8.3 gilt also

$$\|k\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(K)^2$$

Satz 8.6 Es sei $k \in C([a,b]^2)$ mit $k(x,y) = \overline{k(y, x)}$. Für den Integraloperator K aus 8.5 gilt dann für $f \in L_2[a,b]$ die Entwicklung

$$Kf(x) = \int_a^b k(x, y)f(y)dy = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \int_a^b f(y)\overline{\phi_n(y)}dy\,\phi_n(x)$$

Definition 8.7 Für Hilberträume G, H und $0 < p < \infty$ definiert man

$$S_p(H, G) := \{A \in K(H,G) : (s_n(A))_{n\in \mathbf{N}0} \in l_p\}$$

und speziell $S_p(H) := S_p(H,H)$. Man schreibt

$$\nu_p(A) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} s_n(A)^p\right)^{1/p} \quad \text{für } A \in S_p(H, G).$$

Wegen 8.4 besteht $S_2(H, G)$ genau aus den Hilbert-Schmidt Operatoren, und es gilt $\nu_2(A) = |A|$. Man bezeichnet $|A|$ als die Hilbert-Schmidt Norm von A; wie man leicht sieht, hat $|\ |$ die Eigenschaften einer Norm. Operatoren in $S_1(H, G)$ bezeichnet man als **nukleare Operatoren** und im Fall G = H auch als Operatoren der **Spurklasse**.

Lemma 8.8 Für Hilberträume E, F, G, H und p, q, r > 0 gelten

(i) $S_p(H, G)$ ist Unterraum von K(H, G).

(ii) Für $A \in S_p(H,G)$ ist $A^* \in$,$S_p(G, H)$ und $\nu_p(A) = \nu_p(A^*)$.

(iii) Für $A \in S_p(F,G)$, $T \in L(E, F)$ und $S \in L(G, H)$ ist $SAT \in S_p(E, H)$.

(iv) Für $A \in S_p(F, G)$, $B \in S_q(E, F)$ ist $AB \in S_r(E, G)$ falls $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Wegen (i) und (iii) ist $S_p(H)$ zweiseitiges Ideal.

Satz 8.9 $A \in L(H, G)$ ist nuklear genau dann, wenn es Folgen $(x_n)_{n\in\mathbf{N}0} \subset H$ und $(y_n)_{n\in\mathbf{N}0} \subset G$ gibt mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||x_n|| ||y_n|| < \infty \qquad \text{und } Ax = \sum_{n=0}^{\infty} < x, x_n > y_n \ , x \in H.$$

Satz 8.10 ν_1 ist eine Norm auf $S_1(H, G)$, und für $A \in S_1(H, G)$ gilt

$$\nu_1(A) = \inf \{ \sum_{n=0}^{\infty} ||x_n|| ||y_n|| : \sum_{n=0}^{\infty} <., x_n > y_n \text{ ist nukleare Darstellung für } A\}.$$

Satz 8.11 Für $A \in S_1(H)$ und jede Orthonormalbasis $(e_i)_{i\in I}$ in H ist $(<Ae_i, e_i>)_{i\in I}$ summierbar, und für jede nukleare Darstellung $A = \sum_{n=0}^{\infty} <., x_n > y_n$ von A gilt

$$\sum_{i\in I} < Ae_i, e_i > = \sum_{n=0}^{\infty} < y_n, x_n > .$$

Definition 8.12 Für $A \in S_1(H)$ erklärt man die Spur von A durch

$$\mathrm{spur}(A) := \sum_{i\in I} < Ae_i, e_i >$$

Satz 8.13 Die Spur definiert eine stetige Linearform $\mathrm{spur} : (S_1(H), \nu_1) \to \mathbf{K}$ mit $\mathrm{spur}(A^*) = \overline{\mathrm{spur}(A)}$ für $A \in S_1(H)$.Für $A \in K(H)$, $B \in L(H)$ mit $AB = BA \in S_1(H)$ gilt spur(AB) = spur(BA).

Bemerkung 8.14 (i) Ist $A \in S_1(H)$ und $A = A^*$, so folgt (aus 8.11 und 7.4), daß

$$(\lambda(A))_{n=0}^{\infty} \in l_1 \ \text{ und } \ \mathrm{spur}(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(A).$$

(ii) Es sei H ein komplexer unendlichdim. Hilbertraum und $A \in K(H)$. Man kann dann folgendes zeigen: $\sigma_p(A) \setminus \{0\}$ besteht aus einer Nullfolge von Eigenwerten von A endlicher algebraischer Vielfachheit. Bezeichnet dann $\lambda_n(A)$ eine Eigenwertfolge von A (d.h. eine Aufzählung der von Null verschiedenen Eigenwerte von A mit fallenden Beträgen und der algebraischen Vielfachheit nach gezählt, ggf. mit Nullen aufgefüllt), so gelten die **Weyleschen Ungleichungen**

$$\sum_{n=0}^{m} |\lambda_n(A)|^p \le \sum_{n=0}^{m} s_n(A)^p \quad 0 < p < \infty, m \in \mathbf{N}_0.$$

Für $A \in S_1(H)$ folgert man daraus den Satz von Lidskii:

$$\mathrm{spur}(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(A).$$

(iii) Ist speziell $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ und $K \in L(L_2[a,b])$ der Integraloperator aus 2.6 (vii) mit stetigem Kern $k \in C([a,b]^2)$, gilt $K \in S_1(L_2[a,b])$, so gilt die Spurformel:

$$\mathrm{spur}(K) = \int_a^b k(t,t)dt$$

Hinreichend für $K \in S_1(L_2[a,b])$ ist bei stetigem Kern $k(x,t)$ etwa die Positivität von K oder die Bedingung $\frac{\partial k}{\partial t} \in L_2([a,b]^2)$.

9. Das Sturm – Liovillesche Eigenwertproblem

Als eine Anwendung der Theorie kompakter selbstadjungierter Operatoren werden nun im folgenden die Sturm – Liovillesche Eigenwertaufgaben betrachtet. In $J = [a, b]$ betrachten wir zunächst die homogene Rand – Eigenwertaufgabe

(1) $Lu = \lambda u, \qquad R_1 u = R_2 u = 0$

wobei $L: C^2(J) \to C(J)$ erklärt durch

$Lu := -(pu')' + qu$

mit $q \in C(J, \mathbf{R})$, $p \in C^1(J, \mathbf{R})$, $p > 0$ in J, und die Randoperatoren R_1, R_2 erklärt sind durch

$R_1u := \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a), \qquad R_2u := \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b)$

mit reellen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ mit $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$, $(\beta_1, \beta_2) \neq (0, 0)$. Es sei

$C_R^2(J) := \{u \in C_2(J) : R_1u = R_2u = 0\}$

Eine Zahl $\lambda \in \mathbf{C}$ heißt **Eigenwert** der Aufgabe (1), wenn es $0 \neq u \in C_R^2(J)$ gibt mit $Lu = \lambda u$; u heißt dann eine **Eigenfunktion** zum Eigenwert λ.

Ähnlich zum Problem der schwingenden Saite stellen sich zwei grundlegende Fragen:

- Gibt es überhaupt Eigenwerte, ggf. unendlich viele, und kann man etwa asymptotische Aussagen über die Größe der Eigenwerte machen?
- Unter welchen Voraussetzungen lassen sich gegebenen Funktionen in eine Reihe nach Eigenfunktionen entwickeln?

Für die weiteren Untersuchungen setzen wir nun voraus, daß 0 kein Eigenwert von (1) ist. In diesem Fall besitzt die inhomogene Aufgabe

(2) $Lu = f, \qquad R_1u = R_2u = 0$

für jedes $f \in C(J)$ genau eine Lösung $u \in C_R^2(J)$.

Seien u_1 und u_2 ein Fundamentalsystem von dem homogenen Problem $Lu = 0$ (aber nicht nötig, daß die Randbedingung $R_1u = R_2u = 0$ erfüllt ist). Dann bilden auch $v_1 = (R_1u_2)u_1 - (R_1u_1)u_2$, $v_2 = (R_2u_2)u_1 - (R_2u_1)u_2$ ein Fundamentalsystem, und zwar **mit** $R_1v_1 = 0 = R_2v_2$. Für ein Fundamtentalsystem (v_1, v_2) von $Lu = 0$, das die Randbedingugnen $R_1v_1 = 0 = R_2v_2$ erfüllt erklärt man die **Wronski – Determinante**

$W(x) = p(x)(v_1(x)v_2'(x) - v_1'(x)v_2(x))$

mit $W'(x) = 0$, also $W(x) \neq c \neq 0$ in J. Man erklärt dann die **Greensche Funktion** G durch

$$G(x,t) = \begin{cases} -\frac{1}{c} v_1(x)v_2(t): & a \le x \le t \le b \\ -\frac{1}{c} v_1(t)v_2(x): & a \le t \le x \le b \end{cases}$$

Es gilt $G \in C(J \times J)$ und $G(x, t) = G(t, x)$ in $J \times J$. Die eindeutige Lösung $u \in C^2_R(J)$ von (2) mit $f \in C(J)$ gegeben durch

$$u(x) = Kf(x) := \int_a^b G(x,t)f(t)dt \qquad , x \in J.$$

Ferner gilt: Andere Wahlen von v_1, v_2 mit $R_1v_1 = R_2 v_2 = 0$ zur *gleichen* Greenschen Funktion führen.

Der Integraloperator K ist ein selbstadjungierter, kompakter Operator in $L^2(J)$. Wegen 8.3 ist K ein Hilbert – Schmidt – Operator. Da $L: C^2_R(J) \to C(J)$ bijektiv ist und $L \circ K = id_{C(J)}$, ist $K: C(J) \to C^2_R(J)$ der inverse Operator zu L und $K \circ L = id_{C^2_R(J)}$. Es gilt $K(C(J)) = C^2_R(J)$.

Gilt somit (1) für $u \in C^2(J)$, so folgt $u = \lambda Ku$, und umgekehrt ist jede stetige Lösung u der Integralgleichung $u = \lambda Ku$ in $C^2_R(J)$ und löst (1). Damit ist die Randwertaufgabe (1) auf die **Fredholmsche Integralgleichung** $u - \lambda Ku = 0$, d.h.

$$u(x) - \lambda\int_a^b G(x,t)u(t)dt = 0$$

zurückgespielt worden.

Sei nun K ein Operator in $L_2(J)$. K ist injektiv und es gilt

$$Kf = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n < f, e_n > e_n , \qquad f \in L_2(J).$$

Wegen $Ke_n = \lambda_n e_n$ gilt zunächst $e_n \in C(J)$ und damit sogar $e_n \in C^2_R(J)$. Ferner gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 = \int_a^b\int_a^b |G(x,t)|^2 dxdt .$$

Die Zahlen $\mu_n = \lambda_n$ sind genau die Eigenwerte von L mit den Eigenfunktionen e_n. Dabei ist jeder Eigenwert μ_n einfach.

Satz 9.1 Es sei 0 kein Eigenwert von (1)

(i) Dann ist L diagonalisierbar in dem folgenden Sinn: Es gibt eine Folge μ_n paarweise verschiedener reeller Zahlen mit $|\mu_n| \to \infty$ bestehend aus genau den Eigenwerten von L und ein vollstädniges Orthonormalsystem (e_n) in $L_2(J)$ bestehend aus Eigenfunktionen $e_n \in C^2_R(J)$ von L zu μ_n. Jeder Eigenwert von L ist einfach, und es gilt $\left(\frac{1}{\mu_n}\right) \in l_2$.

(ii) Für $f \in C(J)$ ist die eindeutige Lösung $u \in C^2_R(J)$ von (2) gegeben durch

$$u = Kf = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} < f, e_n > e_n .$$

Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig in J.

(iii) Für jedes $u \in C^2_R(J)$ gilt mit absoluter und gleichmäßiger Konvergenz in J die Entwicklung

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} < u, e_n > e_n \qquad \textbf{(Entwicklungssatz)}$$

Bemerkung 9.2 (i) In 9.1 gilt sogar $\mu_n \to \infty$, insbesondere hat also L höchstens endlich viele negative Eigenwerte, und es dafür $\left(\frac{1}{\mu_n}\right) \in l_1$. Damit gilt also $K \in S_1(L_2(J))$, und wegen 8.14 (i), (iii) gilt die Spurformel

$$\operatorname{spur}(K) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(K) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} = \int_a^b G(t,t)dt$$

(ii) Satz 9.1 (i) gilt auch ohne die Voraussetzung „0 ist kein Eigenwert von (1)“. Zunächst zeigt man, daß es ein $\alpha \in \mathbf{R}$ gibt, das kein Eigenwert von L ist; dann betrachtet man einfach $L - \alpha I$.

(iii) Der Operator L kann auch auf dem größeren Definitionsbereich

E!= $\{u \in C^1(J) : u'$ ist absolut stetig und $u'' \in L^2(J), R_1u = R_2u = 0\}$

betrachtet werden. Für den zugehörigen Integraloperator, $K \in L(L_2(J))$ gilt $R(K) = E$ und $LK f = f$ für $f \in L_2(J)$, $Klu = u$ für $u \in E$.

II. FUNDAMENTALE PRINZIPIEN

10. Der Satz von Baire

Satz 10.1 Ist der vollständig metrische Raum $X \neq 0$ Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen Teilmengen M_n, so enthält eine der Mengen M_n einen inneren Punkt.

Definition 10.2 Es seien X ein metrischer Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge. M heißt nirgends dicht in X, wenn $\overline{M}$ keine inneren Punkte hat. M heißt von 1. Kategorie (oder mager) in X, wenn M Vereinigung von abzählbar vielen nirgends dichten Mengen in X ist. M heißt von 2. Kategorie in X, wenn M nicht von 1. Kategorie in X ist.

Satz 10.3 (von Baire) Ein vollständíger metrischer Raum ist von Kategorie in sich.

Bemerkungen 10.4 Es sei X ein vollständiger metrischer Raum.

(i) Ist $\emptyset \neq M \subset X$ offen, so ist M von 2. Kategorie in X .

(ii) Ist $M \subset X$ von 1. Kategorie in X, so ist das Komplement $M^c := X \setminus M$ dicht in X.

(iii) Es seien $M_n \subset X$ offen und dicht in X; dann ist auch $M := \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ dicht in X.

Folgerung 10.5 Ein Banachraum E hat entweder endliche oder überabzählbare algebraische Dimension.

11. Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

Satz 11.1 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit) Es seien E ein Banachraum, F ein normierter Raum und U!$\subset L(E, F)$ sei punktweise beschränkt, d.h. es gelte

$\sup_{A \in T} \|Ax\| < \infty$ für jedes $x \in E$.

Dann ist U!!beschränkt, d.h. es gilt

$\sup_{A \in T} \|A\| < \infty$.

Theorie der Fourierreihen:

Es bezeichne $C_{2\pi}[0,2\pi]$ den abgeschlossenen Unterraum der Funktionen in $C[0,2\pi]$ mit $f(0) = f(2\pi)$. Es sei $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Ist $f \in C_{2\pi}[0,2\pi]$ (stückweise) C^1, so gilt $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}$ gleichmäßig auf $[0,2\pi]$, wobei $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$, $z \in \mathbf{Z}$. Es gilt i.a. nicht, daß für alle $f \in C_{2\pi}[0,2\pi]$ gilt. Dazu: $s_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikx} := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)D_n(x-t)dt$, wobei $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$ der Dirichlet – Kern ist. Wegen $\sin z = \frac{1}{2\pi}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$, dann gilt für $t \in (0, 2\pi)$ für $D_n(t) = \dfrac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}$.

Es wird nun gezeigt, daß es $f \in C_{2\pi}[0,2\pi]$ gibt, so daß die Fourierreihe an einer Stelle divergiert.

Satz 11.2 Zu $x \in [0, 2\pi]$ gibt es $f \in C_{2\pi}[0,2\pi]$ mit $\sup_n |s_n(f)(x)| = \infty$.

Satz 11.3 Es seien E ein Banachraum, F ein normierter Raum und $(A_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset L(E,F)$. Ist dann $(A_n x)_{n\in\mathbf{N}}$ für jedes $x \in E$ konvergent, so wird durch $Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x$ ein Operator $A \in L(E, F)$ definiert, und es gilt $\|A\| \le \liminf_n \|A_n\| \le \sup_n \|A_n\| < \infty$.

Satz 11.4 (Banach – Steinhaus) Es seien E, F Banachräume und $(A_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset L(E, F)$. Sei $M \subset E$ dicht. Dann sind äquivalent:

(i) Es gibt $A \in L(E, F)$ mit $Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$.

(ii) Es gilt $C := \sup_{n\in N} \|A_n\| < \infty$, und der Limes $\lim_{n\to\infty} A_n x$ existiert für alle $x \in M$.

Wir wenden den Satz von Banach – Steinhaus auf **Quadraturformel** an. Für $n \in \mathbf{N}$ wählen wir eine Unterteilung $a \le t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \ldots < t_{m_n}^{(n)} \le b$ des Intervalles $[a,b]$ und $c_k^{(n)} \in \mathbf{K}$, $k \in 1, \ldots, m_n$, und betrachten die Quadraturformel

$$Q_n(f) = \sum_{k=1}^{m_n} c_k^{(n)} f(t_k^{(n)}),\ f \in C[a,b]$$

Es ist Q_n ein stetiges lineares Funktional aus $C[a,b]$ mit $\|Q_n\| = \sum_{k=1}^{m_n} |c_k^{(n)}|$. Mit Satz 11.4 und dem Approximationssatz von Weierstraß erhält man

Satz 11.5 (von Szergö) Für eine Folge von Quadraturformeln Q_n sind äquivalent:

(i) $Q_n(f) \to \int_a^b f(t)dt$ für alle $f \in C[a,b]$.

(ii) $\sup_n \sum_{k=1}^{m_n} |c_k^{(n)}| < \infty$ und $Q_n(p) \to \int_a^b p(t)dt$ für alle Polynome p.

Sind sämtliche $c_k^{(n)} \ge 0$, so folgt die erste Bedingung in 11.5 (ii) bereits aus der zweiten.

12. Der Satz von der offenen Abbildung

Definition 12.1 Sind X, Y metrische (oder topologische) Räume, so heißt eine Abbildung $f: X \to Y$ offen, wenn $f(U)$ offen ist für jede offene Menge $U \subset X$.

Bemerkung 12.2 (i) Sind X, Y metrische Räume, so ist $f: X \to Y$ genau dann offen, wenn es zu jedem $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit $f(U_\varepsilon^X(x)) \supset U_\delta^Y(f(x))$.

(ii) Injektive Abbildungen $f: X \to Y$ sind genau dann offen, wenn $f(X)$ offen ist und die Inverse $f^{-1}: f(X) \to X$ stetig ist.

Lemma 12.3 Es seien X, Y metrische Räume, X vollständig, f: X → Y sei stetig und es gelte

(*) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X$: $\overline{f(U_\varepsilon^X(x))} \supset U_\delta^Y(f(x))$.

Dann ist f offen.

Definition 12.4 (i) Sind (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, so ist auch X x Y metrischer Raum mit der Metrik

$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{ d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$

(ii) Ein **K** – Vektorraum E versehen mit einer Metrik heißt metrischer Vektorraum, wenn die Addition ‚+': E x E → E gleichmäßig stetig und die skalare Multiplikation ‚*': **K** x E → E stetig ist. Eine Teilmenge $U \supset U_\varepsilon^E(0)$.

Bemerkung 12.5 (i) Jeder normierter Raum ist ein metrischer Vektorraum.

(ii) Es sei E ein metrischer Vektorraum. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß $U_\varepsilon(x) + U_\delta(y) \subset U_\varepsilon(x + y)\ \forall\, x, y \in E$, speziell (mit y = 0 bzw. y = -x)

$x + U_\delta(0) \subset U_\varepsilon(x)$ und $U_\delta(x) \subset x + U_\varepsilon(0)$, $\forall\, x \in E$.

Weiter ist $(\frac{x}{n})_n$ für jedes $x \in E$ eine Nullfolge; für jede Nullumgebung V in E gilt daher $E = \bigcup_{n\in N} nV$.

Lemma 12.6 Es seien E, F metrische Vektorraum, E vollständig. Es sei A: E → F linear und stetig, und es gelte (*) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$: $\overline{A(U_\varepsilon^E(0))} \supset U_\delta^F(0)$.

Dann ist A offen und surjektiv.

Lemma 12.7 Es seien E, F metrische Vektorräume und A: E → F eine stetige lineare Abbildung, so daß A(E) von 2. Kategorie in F ist. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $\overline{A(U_\varepsilon^E(0))} \supset U_\delta^F(0)$.

Satz 12.8 Es seien E, F metrischer Vektorräume und A: E → F eine stetige lineare Abbildung. Ist E vollständig und A(E) von 2. Kategorie in F, so ist A offen und surjektiv.

Satz 12.9 (Satz von der offenen Abbildung). Es seien E, F vollständige metrische Vektorräume. Ist A: E → F stetig, linear und surjektiv, so ist A offen.

Folgerung 12.10 (Isomorphiesatz von Banach). Es seien E, F vollständige metrisch Vektorräume Ist A: E → F seine stetige, lineare und bijektive Abbildung, so ist A^{-1} stetig. Insbesondere ist jede stetige lineare Bijektion zwischen Banachräumen ein Isomorphismus.

Folgerung 12.11 Es seien E, F Banachräume. Für $A \in L(E, F)$ sind äquivalent:

(i) A ist injektiv und R(A) ist abgeschlossen in F.

(ii) Es gibt ein $c > 0$ mit $\|Ax\| \geq c\, \|x\|\ \ \forall\, x \in E$.

Bemerkungen 12.12 (i) Sind X, Y metrische Räume, so ist für f: X → Y der Graph G(f) genau dann abgeschlossen in X x Y, wenn aus $x_n \to x$ und $f(x_n) \to y$ folgt, daß $y = f(x)$. Speziell ist der Graph jeder stetigen Abbildung abgeschlossen. Die Umkehrung gilt nicht:

(ii) Die Abbildung $\frac{d}{dt}: (C^1[0, 1], \|.\|_\infty) \to C[0,1]$ hat abgeschlossenen Graphen, ist aber unstetig.

(iii) Sind E, F metrische Vektorräume, und ist A: E → F linear, so ist G(A) abgeschlossen genau dann, wenn aus $x_n \to 0$ und $Ax_n \to y$ folgt, daß $y = 0$.

Satz 12.13 (Satz vom abgeschlossenen Graphen). Es seien E, F vollständige metrische Vektorräume und A: E → F linear. Ist dann der Graph G(A) von A abgeschlossen, so ist A stetig.

Satz 12.14 (Hellinger – Toeplitz). Es sei E ein Hilbertraum, und A: $E \to E$ sei linear und symmetrisch, d.h. es gelte $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$, $x, y \in E$. Dann ist A stetig.

13. Projektionen

Ist E ein **K**-Vektorraum, so heißt eine lineare Abbildung P: $E \to E$ eine Projektion in E, wenn $P^2 = P$. Ist P eine Projektion, so auch $Q = I - P$. Es gilt dann $PQ = QP = 0$, $N(P) = R(Q)$, $R(P) = N(Q)$, und $E = N(P) \oplus R(P)$. Sind E_0, E_1 Unterräume von E mit $E = E_0 \oplus E_1$, das heißt $E = E_0 + E_1$ und $E_0 \cap E_1 = \{0\}$, so hat jedes $x \in E$ eine eindeutige Zerlegung $x = x_0 + x_1$ mit $x_0 \in E_0$ und $x_1 \in E_1$; die Zuordnung $P : E \to E$, $Px = x_0$ ist eine Projektion in E mit $R(P) = E_0$ und $N(P) = E_1$; P heißt die Projektion von E auf E_0 längs E_1. In diesem Fall ist $Q = I - P$ die Projektion von E auf E_1 längs E_0.

Definition 13.1 Es sei E_0 ein Unterraum des metrischen Vektorraumes E. Dann heißt E_0 komplementiert oder stetig projiziert in E, wenn es einen Unterraum E_1 von E gibt, so daß $E = E_0 \oplus E_1$ gilt und die Projektion von E auf E_0 längs E_1 stetig ist. In diesem Fall nennt man $E = E_0 \oplus E_1$ eine **topologisch direkte Summe**.

Bemerkungen 13.2 (i) E_0 ist genau dann komplementiert in E, wenn es eine stetige lineare Projektion $P : E \to E$ gibt mit $R(P) = E_0$. In diesem Fall ist $E_0 = N(I - P)$ automatisch abgeschlossen und E_0 besitzt wegen $E = R(P) \oplus N(P)$ ein abgeschlossenes algebraisches Komplement in E.

(ii) Sind E_0, E_1 Unterräume des metrischen Vektorraumes E mit $E = E_0 \oplus E_1$, so ist $\Phi: E_0 \times E_1 \to E$, $\Phi(x_0, x_1) := x_0 + x_1$ stetig, linear und bijektiv. Die Projektion P von E auf E_0 längs E_1 ist stetig genau dann, wenn Φ ein Isomorphismus ist.

(iii) Wegen 3.9 ist jeder abgeschlossene Unterraum eines Hilbertraumes komplementiert. Abgeschlossene Unterräume von Banachräumen sind i.a. nicht komplementiert. Zum Beispiel ist c_0 und l_∞ nicht komplementiert. Es gilt nach einem (tiefen) Satz von Lindenstrauß – Tzafriri ist ein Banachraum, in dem jeder abgeschlossene Unterraum komplementiert ist, isomorph zu einem Hilbertraum.

(iv) Jeder endlichdimensionale Unterraum einen normierten Raum Raumes ist komplementiert.

Satz 13.3 Es sei E ein vollständiger metrischer Vektorraum.

(i) Sind E_0 und E_1 abgeschlossene Unterräume von $E = E_0 \oplus E_1$, so sind E_0 und E_1 komplementierte Unterräume, und die Summe ist topologisch direkt.

(ii) Eine Projektion P in E ist stetig genau dann, wenn N(P) und R(P) abgeschlossen sind.

Satz 13.4 Es seien E, F, G vollsändige metrische Vektorräume und A: $E \to F$, B: $F \to G$ stetige lineare Abbildungen. Es sei $N(A) = \{0\}$, $R(A) = N(B)$, $R(B) = B$. Dann sind äquivalent:

(i) Es gibt eine stetige lineare Abbildung $R : G \to F$ mit $B \circ R = id_G$.

(ii) Es gibt eine stetige lineare Abbildung L: $F \to E$ mit $L \circ A = id_E$.

(iii) $N(B) = R(A)$ ist komplementiert in F.

Bemerkungen 13.5 (i) (Fortsetzungsproblem). Seien F, H metrische Vektorräume, $E \subset F$ ein abgeschlossener Unterraum, und T: $E \to H$ stetig und linear. Gesucht ist eine stetige lineare Fortsetzung $\tilde{T} : F \to H$ von T. Ist E stetig projizierter Unterraum von F, also $E = R(P)$ mit einer stetigen linearen Projektion P in F, so ist $\tilde{T} := T \circ P$ eine solche Fortsetzung.

(ii) (Liftingproblem). Es seien nun F, H Banachräume, $E \subset F$ ein abgeschlossener Unterraum und $T \in L(H, F/E)$. Es bezeichne $\pi: F \to E/F$ die Quotientenabbildung. Gesucht ist ein Lifting $\tilde{T}$ zu T, d.h. $\tilde{T} \in L(H, F)$ mit $\pi \circ \tilde{T} = T$. Ist F komplementierter Unterraum von F, so gibt es wegen 13.4 ein $R \in L(F/E, F)$ mit $\pi \circ R = id$, und $\tilde{T} := R \circ T$ ist ein solches Lifting.

14. Der Satz von Hahn – Banach

Definition 14.1 Es sei E ein **K** – Vektorraum. Eine Abbildung $p: E \in \mathbf{R}$ heißt **sublineares Funktional**, wenn gilt:
(i) $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}_+, x \in E$.
(ii) $p(x + y) \le p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E$.

Satz 14.2 (Satz von Hahn - Banach) Es seien E ein reeller Vektorraum, p ein sublineares Funktional auf E, F ein Unterraum von E, und $\phi : F \to \mathbf{R}$ ein lineares Funktional mit $\phi(x) \le p(x)$ für alle $x \in F$. Dann gibt es ein lineares Funktional $\Phi: E \to \mathbf{R}$ mit $\Phi|_F = \phi$ und $\Phi(x) \le p(x)$ für alle $x \in E$.

Satz 14.3 (Satz von Hahn – Banach). Es sei E ein **K** – Vektorraum, **K** = **R** oder **K** = **C**, p eine Halbnorm auf E, $F \subset E$ ein Unterraum, und $\phi: F \to \mathbf{K}$ ein lineares Funktional mit $|\phi(x)| \le p(x)$ für alle $x \in F$. Dann gibt es ein lineares Funktional $\Phi: E \to \mathbf{K}$ mit $\Phi|_F = \phi$ und $|\Phi(x)| \le p(x)$ für alle $x \in E$.

Folgerung 14.4 Es sei E ein **K** – Vektorraum, p eine Halbnorm auf E, und $x \in E$. Dann gibt es ein lineares Funktional Φ auf E mit $\Phi(x) = p(x)$ und $|\Phi(y)| \le p(y)$ für alle $y \in E$.

Folgerung 14.5 Es seien E ein normierter Raum und $F \subset E$ ein Unterraum.
(i) Zu jedem $\phi \in F'$ gibt es eine Fortsetzung $\Phi \in E'$ mit $\|\Phi\| = \|\phi\|$.
(ii) Zu jedem $x \in E$ gibt es ein $\phi \in E'$ mit $\|\phi\| \le 1$ und $\phi(x) = \|x\|$- Es gilt
$\|x\| = \max \{ |\phi(x)| : \phi \in E', \|\phi\| \le 1\}, x \in E$ **(Normformel)**

Satz 14.6 Sei E ein normierter Raum. Dann ist die kanonische Abbildung $J_E: E \to E''$ erklärt durch $(J_E(x))(\phi) := \phi(x), x \in E, \phi \in E'$, eine lineare Isometrie.

Folgerung 14.7 Jeder normierte Raum ,E besitzt eine Vervollständigung ($\tilde{E}$,I), das heißt es gibt einen Banachraum $\tilde{E}$ und eine Isometrie $I : E \to \tilde{E}$ mit $\overline{I(E)} = \tilde{E}$ .Ist dabei E ein Prähilbertraum, so kann $\tilde{E}$ als ein Hilbertraum gewählt werden.
Eine Vervollständigung ist eindeutig bis auf lineare bijektive Isometrie.

Definition 14.8 Es seien E, F normierte Räume und $A \in L(E, F)$. Die Abbildung $A': F' \to E'$, $A'(\phi) := \phi \circ A$ heißt die duale Abbildung zu A.

Bemerkung 14.9 Ist E ein Hilbertraum, so ist nach dem Rieszschen Darstellungssatz die Abbildung $\phi_E: E \to E'$, $(\Phi_E(x))(y) = \langle y, x\rangle$ bijektiv und isometrisch. Sind E, F Hilberträume und $A \in L(E, F)$, so ist die duale Abbildung A' bis auf kanonische Identifikat identisch mit der adjungierten Abbildung A*, denn für $x \in E$, $y \in F$ gilt $A' = \Phi_E \circ A^* \circ \Phi_F^{-1}$.

Satz 14.10 Es seien E, F, G normierte Räume und $A \in L(E, F)$, $B \in L(F, G)$. Dann gelten $A' \in L(E, F)$, $\|A'\| = \|A\|$, sowie $(B \circ A)' = A' \circ B'$. Weiter gilt $J_F \circ A = (A')' \circ J_E$.

Definition 14.11 Es sei E ein normierter Raum und $\varnothing \ne M \subset E$, $\varnothing \ne N \subset E$. Wir erklären die Polare M° von M in E' bzw. die Polare N° von N in E durch
$$M^\circ := \{ \phi \in E' : |\phi(x)| \le 1 \text{ für alle } x \in M\}$$

$N^\circ := \{ x \in E : |\phi(x)| \leq 1$ für alle $\phi \in N\}$.

Ist F ein Unterraum von E bzw. E‘, so nennt man F° den Annullator von F. Eine Teilmenge M des **K**-Vektorraumes ,E heißt konvex, wenn für alle $x,y\in M$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$. M heißt absolutkonvex, wenn für alle $x, y \in M$ und $\lambda, \mu \in$ **K** mit $|\lambda| + |\mu| \leq 1$ gilt $\lambda x + \mu y \in M$. Polaren sind stets absolutkonvex und abgeschlossen. Für Unterräume $F \subset E$ bzw. $G \subset E'$ gilt

$F^\circ = \{ \phi \in E' : \phi(x) = 0$ für alle $x \in F\}$.

$G^\circ = \{ x \in E: \phi(x) = 0$ für alle $\phi \in G\}$.

Satz 14.12 Sind E, F normierte Räume und $A \in L(E, F)$, so gilt $R(A')^\circ = N(A)$ und $R(A)^\circ = N(A')$.

Analog zum Hilbertraumfall gilt auch die Formel $\overline{R(A)} = N(A')^\circ$.

Satz 14.13 (Trennungssatz für konvexe Mengen). Es sei E ein normierter Raum, und A, B seien konvexe Teilmengen von E mit $A \cap B = \emptyset$.

(i) Ist A offen, so gibt es ein $\phi \in E'$ und $\gamma \in$ **R**, so daß

$\operatorname{Re} \phi(x) < \gamma \leq \operatorname{Re} \phi(y)$ für alle $x \in A, y \in B$.

(ii) Ist A kompakt und B abgeschlossen, so gibt es $\phi \in E'$, $\gamma_1, \gamma_2 \in$ **R**, so daß

$\operatorname{Re} \phi(x) \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq \operatorname{Re} \phi(y)$ für alle $x \in A, y \in B$.

(iii) Ist B absulutkonvergenz und abgeschlossen und $x \notin B$, so gibt es $\phi \in E'$ mit

$\sup_{y\in B}|\phi(y)|<|\phi(x)|$.

(iv) Ist B abgeschlossener Unterraum und $x \notin B$, so gibt es $\phi \in E'$ mit $\phi|_B = 0$ und $\phi(x) = 1$.

Satz 14.14 (Bipolarensatz) Es sei E ein normierter Raum und $\emptyset \neq A \subset E$ eine absolutkonvexe Teilmenge. Dann gilt $\overline{A} = (A^\circ)^\circ =: A^{\circ\circ}$.

Folgerung 14.15 Ein Unterraum F eines normierten Raumes E ist dicht genau dann, wenn $F^\circ = \{0\}$.

Folgerung 14.16 Sind E, F normierte Räume und $A \in L(E, F)$, so gilt $\overline{R(A)} = N(A')^\circ$.

Bemerkung 14.17 In der Situation von 14.16 ist R(A) genau dann abgeschlossen, wenn $R(A) = N(A')^\circ$. Dies ist nach dem Satz vom abgeschlossenen Wertebereich für Banachräume E, F äquivalent dazu, daß R(A‘) abgeschlossen ist, und auch dazu, daß $R(A') = N(A)^\circ$.

Normierte Räume, für die J surjektiv ist, werden reflexiv genannt und im Abschnitt 15 (Funktionalanalysis II) behandelt.

INDEX ZU FUNKTIONALANALYSIS I