Stochastik I, M. Voit, SS 05

Vorwort:

Begriff „Stochastik" aus griechischen: „Geschicktes Vermuten"

Stochastik
↙ ↘
W'theorie Statistik.

W'theorie:
- Allg. mathematische Hilfsmittel zur Modellierung zufälliger Phänomene.
- Modellierung typischer Phänomene
- Mathematische Aussagen über Modelle.

Statistik: Problem: Beschreibt ein math. Modell die Realität korrekt oder „adäquat"?

⇝ Test, ob Modell richtig oder falsch ist!

Wie zuverlässig ist ein solcher Test?

Problem: Math. Modell hängt von unbekannten Parametern ab

⇝ Schätze Parameter.

Bsp.: Werfe 1-Euro Münze n-mal „unabhängig" mit mögl. Ausgängen Z(ahl) oder W(appen).

Ergebnisse der Zieh-folgen $\omega \in \Omega := \{Z, W\}^n$

Genaue W'keit $p \in]0,1[$ für Kopf unbekannt,

Vermutung $p = 1/2$. („Faire Münze")

$n = 10$, davon 3x Kopf. Kann man folgern: Münze unfair.

Antwort: Eher nein

$n = 1000$, davon 300 x Kopf. Dann $p \neq 1/2$ „sehr wahrscheinlich"

§1 Wahrscheinlichkeitsräume

19'tes Jhd.: „W'rechnung kein Gebiet der Mathematik, da z.T. zu unpräzise und wg. Auftreten von Paradoxa".

Erst saubere Axiomatische Modellbildung 1933 d. Kolmogorov auf Basis der ca. 1900 entwickelten Maß- u. Integrationstheorie (Lebesgue)

Motivierung der Axiome durch Beispiele:

1.1 Bsp: Würfeln:

Einmal Würfeln = Durchführung eines Zufallsexperiments

$1, \dots, 6$ = mögliche Ergebnisse („Elementarereignisse")

$\Omega = \{1, \dots, 6\}$ = Menge d. mögl. Ergebnisse

$\mathcal{P}(\Omega) := \{A \subset \Omega\}$ Potenzmenge von Ω

Mengen $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ heißen Ereignisse

Bsp: $\{1,3,5\}$ = Ereignis, eine ungerade Zahl zu würfeln

Sinnvolle Def. von W'keit für Ereignissen bei fairem Würfel:

$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{6}$; Bsp: $P(\{1,3,5\}) = 3/6 = 1/2$

$P \mathrel{\hat=}$ engl. Probability. Andere Schreibweise: W(ahrscheinlichkeit).

Beachte: $P: \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ Abb mit gewissen Eigenschaften.

1.2 Bsp.: Blindes Tippen einer reellen Zahl aus $[0,1]$:

Hier: $\Omega = [0,1]$ Menge d. möglichen Ergebnisse. Ω überabzählbar

Frage: Sinnvolle Def. von W'keiten $P(A) \in [0,1]$ für $A \subset [0,1]$?

① $A = [a,b]$, $]a,b[$ $(0 \le a \le b \le 1) \Rightarrow P(A) = b-a$ sinnvoll
$(z.B.: P(\{1/2\}) = 0\,!)$

② $A \subset [0,1]$ endliche Vereinigung von disjunkten Intervallen $A_1, \dots, A_n \subset [0,1]$
$\Rightarrow P(A) := \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \in [0,1]$ sinnvoll

③ Schritt 2 auch sinnvoll, falls A abzählbar unendl. Vereinigung disjunkter Intervalle A_i, $i \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow P(A) := \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \in [0,1]$ sinnvoll.

Bsp: $P(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$!

(4) Problem: Was tun, falls A nicht von Form (1)-(3) ist?

Frage: Für welche $A \subset \Omega = [0,1]$ ist $P(A)$ sinnvoll definierbar?

Also: Idee: Definiere P nur auf passenden Menge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$!

Axiomatisierung der Idee:

1.3 Def: Ω Menge. Ein sog. Teilmengensystem $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt

(1) Algebra über Ω, falls:
- (a) $\Omega \in \mathcal{A}$
- (b) $A \in \Omega \Rightarrow \bar{A} := \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- (c) $n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$

(2) σ-Algebra über Ω, falls (a), (b) und
- ($\tilde{c}$) $A_i \in \mathcal{A}$; $i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup A_i \in \mathcal{A}$.

1.4 Fakten:

(1) $\mathcal{A}$ Algebra $\overset{(a)}{\Rightarrow} \Omega \in \mathcal{A} \overset{(b)}{\Rightarrow} \emptyset \in \mathcal{A}$

(2) $\mathcal{A}$ Algebra, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cap \dots \cap A_n = \overline{(\bar{A}_1 \cup \dots \cup \bar{A}_n)} \in \mathcal{A}$

(3) $\mathcal{A}$ σ-Algebra, $A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in \mathbb{N}) \Rightarrow \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ (wie (2)!)

(4) $\mathcal{A}$ σ-Algebra $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ Algebra

und: Für $|\Omega| < \infty$ stimmen Begriffe überein.

Bsp: Ω beliebig $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(\Omega)$ und $\{\emptyset, \Omega\}$ sind σ-Algebren über Ω.

Sprechweisen: $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ σ-Algebra.

Mengen aus $A \in \mathcal{A}$ heißen Ereignisse.

Ω sicheres Ereignis, $\emptyset$ unmögliches Ereignis.

Bsp: $\Omega = \{1, \dots, 6\} \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ sinnvoll!

Frage: $\Omega = [0,1]$; Sinnvolle σ-Algebra? Dazu:

1.5. Erzeugung von σ-Algebren: Sei Ω Menge.

(1) I Indexmenge, $\{\mathcal{A}_i : i \in I\}$ Menge von σ-Algebren über Ω

$\Rightarrow \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ ist σ-Algebra über Ω (Übung!!)

② Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ beliebig $\Rightarrow \sigma(\mathcal{F}) := \bigcap\limits_{\mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebra über } \Omega \text{ mit } \mathcal{F} \subset \mathcal{A}} \mathcal{A}$

ist σ-Algebra nach ①, die sog. von $\mathcal{F}$ erzeugte σ-Algebra.

$\sigma(\mathcal{F})$ ist die kleinste σ-Algebra über Ω, die $\mathcal{F}$ enthält.

Bsp.: ① $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$, $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{6\}\} \Rightarrow \sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{P}(\Omega)$

denn: $\mathcal{A}$ σ-Algebra mit $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$, $A \subset \Omega \Rightarrow A = \bigcup\limits_{i \in A} \{i\} \in \mathcal{A} \Rightarrow A \in \sigma(\mathcal{F})$

② Ω beliebig, $A \subset \Omega$, $\mathcal{F} := \{A\} \Rightarrow \sigma(\mathcal{F}) = \{\emptyset, \Omega, A, \bar{A}\}$.

③ $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \{I : I \subset [0,1] \text{ Intervall}\}$.

$\Rightarrow \sigma(\mathcal{F})$ sog. σ-Algebra d. Borelmengen

(Sie enthält praktisch alle vorstellbaren Teilmengen von $[0,1]$).

1.6. Def. von Wahrscheinlichkeiten: Sei Ω Menge, $\mathcal{A}$ σ-Algebra über Ω.

Eine Abb. $P : \mathcal{A} \to [0,1]$, $A \mapsto P(A)$ heißt W'maß (oder Verteilung)

falls ① $P(\Omega) = 1$

② $A_i \in \mathcal{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ disjunkt $\Rightarrow P\left(\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} P(A_i)$

(„σ-Additivität").

Ist P W'maß zu $\mathcal{A}, \Omega$, so heißt $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W'raum.

1.7. Fakten. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W'raum; $A, B, A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in \mathbb{N})$. Dann:

① $P(\emptyset) = 0$. Denn $P(\emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset) + \ldots$

② Axiom 1.6(2) gilt auch f. endlich viele A_i.

③ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ da $A \cup \bar{A} = \Omega$ und $P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1$

④ $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$ da $(A \cap B) \cup A \setminus B = A$ und disjunkt!

⑤ $B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$

⑥ $A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in \mathbb{N})$ beliebig $\Rightarrow P\left(\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} P(A_i)$

denn. $P\left(\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = P(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2 \setminus A_1) + \ldots$

$\leq \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} P(A_i)$

⑦ ⑥ gilt analog für endlich viele A_i

⑧ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

denn " $P(A) + P(B \setminus A)$ " ④ . Verallgemeinerung von ⑧ ist:

1.8. Siebformel: $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W'raum, $n \geq 2$, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ $\Rightarrow$

$$P(A_1 \cup \dots A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) - P(A_1 \cap A_2) \dots - P(A_{n-1} \cap A_n) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots A_n)$$

Beweis: Induktion nach n: $n = 2$ vgl. 1.7(8)

$n \to n+1$: $P(A_1 \cup \dots \cup A_{n+1}) = P((A_1 \cup \dots \cup A_n) \cup A_{n+1}) =$

$$= P(A_1 \cup \dots \cup A_n) + P(A_{n+1}) - P((A_1 \cup \dots \cup A_n) \cap A_{n+1})$$

$$= \text{———— || ————} - P((A_1 \cap A_{n+1}) \cup \dots \cup (A_n \cap A_{n+1}))$$

$$\overset{IV}{=} \left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \right] + P(A_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+2} \sum P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{\dots} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \quad \blacksquare$$

Gleiches Argument liefert Siebformel für endliche Mengen $A_1, \dots, A_n$:

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|.$$

1.9. Laplacescher W'raum: Ω endlich, $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$.

Setze $P(A) := |A| / |\Omega| = \dfrac{\#\text{ „Günstige Ereignisse"}}{\#\text{ „mögl. Ereignisse"}}$ für $A \subset \Omega$

P ist ein W'maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und heißt Gleichverteilung auf Ω

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ heißt Laplacescher W'raum.

Bsp: (1) 1x Würfeln: $\Omega = \{1, \dots, 6\}$.

(2) 2x Würfeln: $\Omega = \{1, \dots 6\}^2$, $|\Omega| = 36$

$$P(\text{"Augensumme bei 2 Würfen ist 4"}) = \frac{|\{(1,3), (2,2), (3,1)\}|}{36} = 3/36$$

Laplacesche W'räume treten häufig auf; im Prinzip kann man dort einfach Rechnen durch Abzählen.

Aber: Häufig begegnet man kombinatorischen Schwierigkeiten

„Faustregel": Ist $P(A)$ schwierig, versuche $P(\overline{A})$ und $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Bsp.: $P(\text{„mind. eine 6 bei 4x Würfeln"}) =$

$$1 - P(\text{„\underline{keine} 6 bei 4x Würfeln"}) = 1 - \left(5/6\right)^4.$$

1.10. Geburtstagsproblem. 10 Personen treffen zufällig zusammen.

$P($„Mind. 2 haben am gleichen Tag Geburtstag"$) =: p = ?$

Annahme: Geburtstage unabhängig, 365 Tage, gleichverteilt (realistisch?)

Dann Modell: Laplace'scher W'raum mit $\Omega = \{1, \dots, 365\}^{10}$.

Dann $p = 1 - P($„alle 10 haben verschiedene Geburtstage"$)$

$$= 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \frac{363}{365} \cdots \frac{(365-9)}{365}$$

„Faustregel": Viele Abzählprobleme reduzieren auf eines der folgenden Standard-Urnenmodelle.

1.11. Urnenmodelle: Box („Urne") mit N Kugeln mit Nummern $1, \dots, N$. Ziehe k-mal Kugel und notiere Ergebnis

Ω = Menge der mögl. Ziehergebnisse; Frage: $|\Omega| = ?$

Möglichkeiten: Zurücklegen von gezogenen Kugeln: Ja / Nein
Rücksicht auf Ziehreihenfolge: — " —
$\Rightarrow$ 4 Fälle

Fall 1: Rücksicht auf Reihenfolge, mit Zurücklegen: $\Omega = \{1, \dots, N\}^K$, $|\Omega| = N^K$

Fall 2: — " —, ohne — " —:

$$\Omega = \{(a_1, \dots, a_K) \in \{1, \dots, N\}^K : a_i \neq a_j \ \forall i \neq j\}$$

$|\Omega| = N(N-1) \cdots (N-K+1)$; $K \leq N$ nötig (vgl. Geburtstagsproblem)

Fall 3: Keine Rücksicht auf Reihenfolge, ohne Zurücklegen $(K \leq N)$.

$$\Omega = \{A \subset \{1, \dots, N\}, |A| = K\}, \quad |\Omega| = \binom{N}{K} = \frac{N(N-1) \cdots (N-K+1)}{K!}$$

Bsp.: Lotto „6 aus 49": $P($„6 Richtige"$) = 1 / \binom{49}{6} \approx 7 \cdot 10^{-8}$

Fall 4: Keine Rücksicht auf Reihung, mit Zurücklegen:

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_K) \in \{1, \dots, N\}^K : 1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_K \leq N\}$$

Satz: $|\Omega| = \binom{N+K-1}{K}$

Beweis: Betrachte $f: \Omega \to \underbrace{\{(y_1, \dots, y_K) \in \{1, 2, \dots, N+K-1\}^K : y_1 < y_2 < \dots < y_K\}}_{=: W}$

mit $f(x_1, \dots, x_K) := (x_1, x_2 + 1, x_3 + 2, \dots, x_K + K - 1)$

$f: \Omega \to W$ bijektiv $\Rightarrow |\Omega| = |W| \underset{\uparrow \text{Fall 3}}{=} \binom{N+K-1}{K}$ ∎

Neben Laplaceschen W'räume gibt es weitere wichtige W'räume mit $|\Omega| < \infty$ oder Ω abzählbar unendlich:

1.12. Diskrete W'räume und Zähldichten

① Def: $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt diskret $:\Leftrightarrow$ Ω höchstens abzählbar und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

② Das W'maß P auf diskreten W'raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ist eindeutig bestimmt durch die sog. Zähldichte $f: \Omega \to [0,1]$ mit $f(\omega) := P(\{\omega\})$

Denn: $\forall A \subset \Omega: \quad P(A) = P\left(\bigcup_{a \in A} \{a\}\right) = \sum_{a \in A} P(\{a\}) = \sum_{a \in A} f(a) \quad (*)$

Eine Zähldichte f auf Ω genügt $f(\omega) \geq 0 \ \forall \omega \in \Omega$ und $\sum_{a \in \Omega} f(a) = 1$.

③ Fakt: Ist ein solches f geg., so definiert $(*)$ ein W'maß auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Also: Diskrete W'maße beschreibt man i.a. am besten durch Zähldichten

Wichtige Beispiele:

1.13. Binomialverteilungen:

① Idee: Experiment hat 2 mögl. Ausgänge 0, 1 mit W'keit $p \in [0,1]$ und $1-p$.
Wiederhole Experiment n-mal „unabhängig". Für $k \in \Omega := \{0, 1, \dots, n\}$ ist $P(\text{„}k\text{-mal tritt } 0 \text{ auf"}) = \binom{n}{k} \underbrace{p^k (1-p)^{n-k}}$

$\binom{n}{k}$ Mögl., wo k Nullen sind! W'keit: Erst $k\times$ Null, dann $n-k$-mal 1

② Def: Für $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$ ist die Binomialverteilung $B_{n,p}$ das W'maß auf $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$ mit Zähldichte

$$f_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

[Test: $f_{n,p}(k) \geq 0 \ \forall k$ und $\sum_{k=0}^{n} f_{n,p}(k) = \sum_{0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1$]

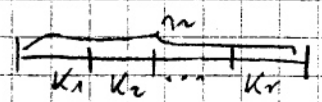
③ Bsp: Werfe „faire" 1-Euromünze 20-Mal
$\Rightarrow B_{20, 1/2}$ Verteilung der Zahl von Wappen.

1.14. Multinomialverteilungen

① Idee: Experiment habe $r \geq 2$ mögl. Ausgänge $a_1, \dots, a_r$ mit W'keiten $p_1, \dots, p_r$ mit $p_1 + \dots + p_r = 1$.
Wiederhole Experiment n-mal unabhängig

Seien $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}_0$ mit $k_1 + \dots + k_r = n$ $\Rightarrow$

$$P(k_1\text{-mal Ausgang } a_1 \text{ und} \dots \text{ und } k_r\text{-mal Ausgang } a_r) = \underbrace{\frac{n!}{k_1! \cdots k_r!}}_{\text{Multinomialkoeffizient!}} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$$



② Def.: $n, r \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_r \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$

Die Multinomialverteilung $M_{n,r;p_1,\dots,p_r}$ ist das W'maß auf $\Omega = \{(k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{N}_0^r : k_1 + \dots + k_r = n\}$ mit Zähldichte

$$f((k_1, \dots, k_r)) = \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}.$$

③ Bsp.: Würfle Zahlen $1, \dots, 6$ mit W'keit $p_1 = \dots = p_6 = 1/6$. Würfle 60-mal

$\Rightarrow n = 60, r = 6$. $P(\text{„Jede Zahl wird genau 10x gewürfelt"})$

$$= \frac{60!}{(10!)^6} \left(\frac{1}{6}\right)^{60} \approx 7 \cdot 10^{-5}.$$

1.15. Geometrische Verteilung.

① Idee: Experiment hat zwei Ausgänge 0, 1 mit W'keiten $p \in]0,1[$ und $1-p$. Wiederhole es unabhängig, bis zum ersten mal 0 auftritt.

$\Rightarrow$ Für $k \in \mathbb{N}$: $P(\text{„im } k\text{-ten Versuch erstmals } 0\text{"}) = (1-p)^{k-1} \cdot p$

② Def.: Die geom. Verteilung mit Parameter $p \in]0,1[$ ist das W'maß auf $\mathbb{N}$ mit Zähldichte $f_p(k) = p(1-p)^{k-1}$

Beachte: $\sum_{k=1}^{\infty} f_p(k) = p \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = p/(1-(1-p)) = 1$ geom. Reihe namensgebend!

③ Bsp.: Glühbirne geht pro Stunde mit W'keit 0,01 kaputt, „unabhängig von bisheriger Lebensdauer".

$\Rightarrow P(\text{„Birne geht in 100'ter Stunde kaputt"}) = 0{,}01 \cdot (0{,}99)^{99}$

Merke: Geom. Verteilung oft benutzt bei Lebensdauer von Bauteilen o.ä.!

1.16 Poisson-Verteilung:

Def.: Die Poisson-Verteilung Π_λ mit Index $\lambda > 0$ ist das W'maß auf $\Omega = \mathbb{N}_0$ mit Zähldichte $f_\lambda(k) := \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$

Beachte dabei $\sum_{k=0}^{\infty} f_\lambda(k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$

Poisson-Verteilung u.a. wichtig als Limes von Binomialverteilungen.

1.17. Satz: Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]0,1[$ Folge so, daß $\lambda := \lim_{n\to\infty} n\cdot p_n > 0$ existiert

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}_0: \lim_{n\to\infty} B_{n,p_n}(\{k\}) = \Pi_\lambda(\{k\})$.

Beweis:
$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{1}{k!} \underbrace{(np_n)((n-1)p_n)\cdots((n-k+1)p_n)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda^k} \cdot \underbrace{\frac{\left(1-\frac{\lambda+r(n)}{n}\right)^n}{\left(-\,\|\,-\right)^k}}_{\to e^{-\lambda}}$$

$r(n) := np_n - \lambda \to 0$ ∎

Bem.: Es gilt quantitativ ($\to$ später)
$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| B_{n,p}(\{k\}) - \Pi_{np}(\{k\}) \right| \le 2np^2 \left(\approx 2\lambda^2/n\right) \quad \forall n, p$$

(dabei $B_{n,p}(\{k\}) = 0$ für $k > n$).

Bsp.: $n = 10^8$ Uranatome, wobei ein Atom pro Sekunde mit W'keit $10^{-7} = p$ zerfällt. Für $k = 0, 1, 2, \ldots n$:

$H(k) := P(\text{„Maximal } k \text{ Atome zerfallen pro Sekunde"}) = \sum_{l=0}^{k} \binom{n}{l} p^l (1-p)^{n-l}$

$H(10) = ?$ z.B. Dazu $\binom{10^8}{10} \approx 10^{80}$ sehr groß

Poisson-Approx.: $n = 10^8$, $p = 10^{-7}$, $\lambda = 10$

$H(10) \approx \sum_{l=0}^{10} \frac{10^l}{l!} e^{-10}$. Fehler $\le 2\cdot 10^8 \cdot (10^{-7})^2 = 2\cdot 10^{-6}$.

Poissonverteilung tritt auch bei anderen Phänomenen approximativ auf; Bsp.:

1.18. Verteilung der Fixpunkte zufälliger Permutationen:

$n \in \mathbb{N}$, $\Omega := S_n := \{\pi : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\} \text{ bijektiv}\}$ symm. Gruppe.

$|\Omega| = n!$ Versehe Ω mit Gleichverteilung P

Satz: Für $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ sei $B_k := \{\pi \in S_n : \pi \text{ hat genau } k \text{ Fixpunkte}\}$.

Dann $P(B_k) = \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l / l!$

Beachte: $P(B_k) \xrightarrow{n\to\infty} 1/k!\, e^{-1} = \Pi_1(\{k\})$

Also: Für große n ist Zahl der Fixpunkte ungefähr Π_1-verteilt!!

Speziell: $P(\text{zufällige Permutation fixpunktfrei}) \approx 1/e$ für große n.

Beweis: $P(B_k) = \frac{|B_k|}{n!}$. Bestimme $|B_k|$; Dazu

$C_k := \{\pi \in \Omega : \pi$ fixiert genau $1, 2, \dots k\}$. Dann $|B_k| = \binom{n}{k} |C_k|$

und $|C_k| = \{\pi \in S_{n-k} : \pi$ ohne Fixpunkt$\}$

$$= (n-k)! - |\{\pi \in S_{n-k} : \pi \text{ hat mind. einen Fixpkt.}\}|$$

$$= (n-k)! - \Big|\bigcup_{\ell=1}^{n-k} \underbrace{\{\pi \in S_{n-k} : \pi(\ell) = \ell\}}_{=: A_\ell}\Big|$$

Siebformel $\Rightarrow$

$$|A_1 \cup \dots \cup A_{n-k}| = |A_1| + \dots + |A_{n-k}| - \big(|A_1 \cap A_2| + \dots + |A_{n-k-1} \cap A_{n-k}|\big) + \dots - \dots$$

$$= (n-k)(n-k-1)! - \binom{n-k}{2}(n-k-2)! + \binom{n-k}{3}(n-k-3)! - \dots$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n-k} (-1)^{\ell+1} \underbrace{\binom{n-k}{\ell}(n-k-\ell)!}_{\frac{(n-k)!}{\ell!}}$$

$$\Rightarrow P(B_k) = \frac{1}{n!}\binom{n}{k}\Big[(n-k)! - \sum_{\ell=1}^{n-k}(-1)^{\ell+1}\frac{1}{\ell!}(n-k)!\Big] \Rightarrow \text{Beh.} \quad \blacksquare$$