§2 Bedingte W'keiten und Unabhängigkeit

Motivierung: A, B Ereignisse im W'raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Was ist W'keit von A bei Kenntnis von B?

Motivierung d. rel. Häufigkeiten: $P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

W'keit für A unter Bdgg. der „Grundgesamtheit" B.

2.1 Def: $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W'raum; $A, B \in \mathcal{A}$ mit $P(B) > 0$

$\Rightarrow P(A|B) := P(A \cap B)/P(B) \in [0,1]$ heißt bedingte W'keit von A unter der Bdgg. B.

2.2. Fakt: Im obigen Situation ist die Abb. $P_B : \mathcal{A} \to [0,1]$, $P_B(A) := P(A|B)$ ein W'maß auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, das sog. bedingte W'maß unter der Bdgg. B.

Denn: $P_B(\Omega) = P(\Omega \cap B)/P(B) = 1$ und σ-Additivität: $A_i \in \mathcal{A}$ disjunkt

$\Rightarrow P_B\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \frac{1}{P(B)} P\left(\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \cap B\right) = \frac{1}{P(B)} P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cap B)\right) = \sum \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$.

2.3. Wichtige Eigenschaften bed. W'keiten: $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W'raum.

① Für $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ mit $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$:

$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$

② Formel von d. totalen W'keit:

Sei $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{A}$ disjunkte Zerlegung von Ω (d.h. $B_1 \cup \dots \cup B_n = \Omega$)

mit $P(B_i) > 0 \ \forall i \Rightarrow \forall A \in \mathcal{A} \quad P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A|B_i)$.

Beweis: ① $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \frac{P(A_1 \cap \dots \cap A_n)}{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})} \cdot \frac{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})}{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-2})} \cdots \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} P(A_1) = \dots$

② $P(A) = P(A \cap (B_1 \cup \dots \cup B_n)) = P((A \cap B_1) \cup \dots \cup (A \cap B_n)) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \dots$ ∎

Formel 2.3(1) wichtig zur Berechnung von W'keiten gestufter Probleme;

Bsp.: 32 Spielkarten (mit 4 Assen) werden an 4 Spieler verteilt.

$p := P($„Jeder Spieler erhält genau ein As"$) = ?$

Lsg.: $A_i :=$ „Spieler i erhält genau 1 As".

$\Rightarrow p = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2)$

$= \frac{\binom{4}{1}\binom{28}{7}}{\binom{32}{8}} \cdot \frac{\binom{3}{1}\binom{21}{7}}{\binom{24}{8}} \cdot \frac{\binom{2}{1}\binom{14}{7}}{\binom{16}{8}}$

Anwendung von 2.3(2) ebenfalls bei mehrstufigen Experimenten ($\rightsquigarrow$ Blatt 3) und

2.4. Formel von Bayes: $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{A}$ disjunkt mit $B_1 \cup \dots \cup B_n = \Omega$ und $P(B_i) > 0 \; \forall i$. $A \in \mathcal{A}$ mit $P(A) > 0 \Rightarrow P(B_i|A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j) P(A|B_j)}$

Beweis: $P(B_i|A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) P(A|B_i)}{P(A)} =$ wg. 2.3(2)! ■

Formel von Bayes praktisch sehr wichtig:

Bsp: Aidstest: 0,1 % aller AIDS-Test liefern positiven Befund.

Test nicht perfekt (z.B. Schlamperei; Verwechslungen)

$\Rightarrow$ 0,2% aller Testergebnisse falsch bei positivem Befund

0,3% — " — negativem Befund.

Frage: $P($„Person HIV-infiziert" $|$ „erster Test liefert positiv"$)$.

Dazu: $A =$ „Test positiv", $B_1 =$ „Person HIV-positiv"

$B_2 =$ „Person HIV-negativ"

$\Rightarrow P(B_1|A) = \frac{P(B_1) P(A|B_1)}{P(B_1) P(A|B_1) + P(B_2) P(A|B_2)} = \frac{10^{-3} \cdot 0{,}998}{10^{-3} \cdot 0{,}998 + 3 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}999} \approx 1/4$ ■

Bereits früher intuitiv Begriff „unabhängig" genutzt. (mehrmals Würfeln etc).

Nun formale Definition:

2.5. Def.: $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W'raum, I Indexmenge.

① $A, B \in \mathcal{A}$ <u>unabhängig</u> $:\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

② Menge $(A_i)_{i \in I}$ aus $\mathcal{A}$ unabhängig $:\Leftrightarrow$

$\forall n \in \mathbb{N}$ und $i_1, \dots, i_n \in I$ <u>verschieden</u>: $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_n})$

d.h. für <u>alle</u> <u>mögl.</u> endl. Kombinationen gilt diese Produktregel!

③ Menge $(A_i)_{i \in I}$ aus $\mathcal{A}$ paarweise unabhängig $:\Leftrightarrow$

$\forall i \neq j \in I: \; P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$.

2.6. Bemerkungen:

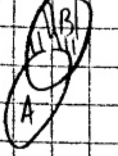
! ① Unabhängigkeit $\Rightarrow$ paarweise Unabhängigkeit („$\Leftarrow$" i.a. falsch; Übung)

② Begriff „unabhängig" sehr wichtig; „paarweise unabhängig" nicht wichtig

③ Beziehung zu bed. W'keiten: Seien $A, B \in \mathcal{A}$, $P(B) > 0$. Dann:

A, B unabhängig $\Leftrightarrow$ $P(A) = P(A|B) \left(= \frac{P(A \cap B)}{P(A)}\right)$

d.h. Kenntnis von B ändert W'keit für A nicht!



④ A, B unabhängig $\Rightarrow$ $\bar{A}, B$ unabhängig

denn: $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)\, P(\bar{A})$.

Dieses Resultat ist wesentlich verallgemeinerbar; dazu:

2.7. Def.: $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W'raum

① Mengensysteme $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n \subset \mathcal{A}$ heißen unabhängig, falls:

$\forall A_1 \in \mathcal{C}_1, A_2 \in \mathcal{C}_2, \dots, A_n \in \mathcal{C}_n$: $A_1, \dots, A_n$ sind unabhängig.

② $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ $\cap$-abgeschlossen $:\Leftrightarrow \forall A, B \in \mathcal{C}: A \cap B \in \mathcal{C}$.

2.8. Satz.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W'raum; $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ unabhängige, $\cap$-abgeschlossene Mengensysteme in $\mathcal{A}$ $\Rightarrow$ $\sigma(\mathcal{C}_1), \dots, \sigma(\mathcal{C}_n)$ $(\subset \mathcal{A})$ unabhängig.

Bsp.: ① $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$ mit Gleichverteilung beschreibt „2x Würfeln"

$\mathcal{C}_1 := \{A \times \{1, \dots, 6\} : A \subset \{1, \dots, 6\}\}$ beschreibt erstes Würfeln

$\mathcal{C}_2 := \{\{1, \dots, 6\} \times A :$ —〃— $\}$ —〃— zweites Würfeln.

$\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ unabhängig.

② Seien $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ disjunkt und $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{A}$ disjunkt

Für $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$ seien A_i und B_j unabhängig

d.h. $\mathcal{C}_A := \{A_1, \dots, A_n, \emptyset\}$, $\mathcal{C}_B := \{B_1, \dots, B_m, \emptyset\}$ unabhängig.

Satz 2.8 $\Rightarrow$ $\sigma(\mathcal{C}_A)$ und $\sigma(\mathcal{C}_B)$ unabhängig.

Also z.B. $P\left(((A_1 \cup A_2) \cap \bar{A}_3) \cap (B_1 \cup B_4)\right) = P((A_1 \cup A_2) \cap \bar{A}_3) \cdot P(B_1 \cap B_4)$

! Achtung: $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ $\cap$-abgeschlossen wichtig! Gegenbsp. Übungen!

Beweis von Satz 2.8 nicht ganz einfach; dazu:

2.9. Def.: Ω Menge; Mengensystem $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt <u>Dynkin-System</u>, falls

ⓐ $\Omega \in \mathcal{D}$

ⓑ $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ mit $D_1 \subset D_2 \Rightarrow D_2 \setminus D_1 \in \mathcal{C}$

ⓒ $(D_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}$ paarweise disjunkt $\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{C}$.

2.10. Lemma. Ω Menge, $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Dann:

① $\mathcal{C}$ σ-Algebra $\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ $\cap$-abgeschlossenes Dynkin-System.

② $\mathcal{C}$ $\cap$-abgeschlossen $\Rightarrow$ $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{D}(\mathcal{C}) := \bigcap_{\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega) \text{ Dynkinsyst.}: \mathcal{C} \subset \mathcal{D}} \mathcal{D}$

$\mathcal{D}(\mathcal{C})$ heißt das von $\mathcal{C}$ erzeugte Dynkin-System, es ist das kleinste mit $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}(\mathcal{C})$.

Beweis: ① „$\Rightarrow$" Klar.

„$\Leftarrow$": $\Omega \in \mathcal{C}$, $A \in \mathcal{C} \Rightarrow \Omega \setminus A = \bar{A} \in \mathcal{C}$

$A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B)) \in \mathcal{C}$ und damit:

$A_i \in \mathcal{C}\ (i \in \mathbb{N}) \Rightarrow B_n := \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{C}\ (i \in \mathbb{N}) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} (B_n \setminus B_{n-1}) \in \mathcal{C}$

Also gelten alle Axiome einer σ-Algebra.

② ⓐ $\sigma(\mathcal{C})$ σ-Algebra <u>und</u> Dynkinsystem $\Rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{C})$

ⓑ <u>Zeige</u> für umgekehrte Inklusion: $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ ist σ-Algebra.

<u>Zeige</u> dazu wg. ①: $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ $\cap$-abgeschlossen.

Dazu fixiere $A \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$ und sei $\mathcal{D}_A := \{C \in \Omega : A \cap C \in \mathcal{D}(\mathcal{C})\}$

<u>Beh.:</u> $\mathcal{D}_A$ ist Dynkin-System.

[denn: ⓐ $\Omega \in \mathcal{D}_A$

ⓑ $C_2 \subset C_1 \in \mathcal{D}_A \Rightarrow (C_1 \setminus C_2) \cap A = (C_1 \cap A) \setminus (C_2 \cap A) \in \mathcal{D}(\mathcal{C}) \Rightarrow C_1 \setminus C_2 \in \mathcal{D}_A$

ⓒ analog]

<u>Ferner:</u> $\forall A \in \mathcal{C} : \mathcal{C} \subset \mathcal{D}_A$, denn $\forall C \in \mathcal{C}: A \cap C \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$

<u>Also:</u> $\forall A\ \mathcal{C}: \mathcal{D}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}_A \Rightarrow \forall A \in \mathcal{C}, B \in \mathcal{D}(\mathcal{C}): A \cap B \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$

$\Rightarrow \forall B \in \mathcal{D}(\mathcal{C}) : \mathcal{C} \subset \mathcal{D}_B$ und somit $\mathcal{D}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}_B$

$\Rightarrow \forall A, B \in \mathcal{D}(\mathcal{C}) : A \cap B \in \mathcal{D}(\mathcal{C})$ q.e.d. ∎

Beweis vom Satz 2.8: Zeige: $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n \subset \mathcal{A}$ unabhängig $\Rightarrow \sigma(\mathcal{C}_1), \dots, \sigma(\mathcal{C}_n)$ unabh.:

Setze $\mathcal{D}_1 := \{A \in \mathcal{A} : P(A \cap C_2 \cap \dots \cap C_n) = P(A) P(C_2) \dots P(C_n) \ \forall C_i \in \mathcal{C}_i\}$.

Dann ist $\mathcal{D}_1$ Dynkinsystem (einfach zu zeigen; wie oben) mit $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{D}_1$

$\Rightarrow \sigma(\mathcal{C}_1) \underset{2.10.②}{=} \mathcal{D}(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{D}_1 \Rightarrow \sigma(\mathcal{C}_1), \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$ unabhängig

Wiederhole nun Verfahren für $\mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n \Rightarrow$ Beh. ∎

Bisher in §2: W'raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ geg.; dort wurden Unabhängigkeit und bed. W'keiten math. untersucht.

Umgekehrt: Beide Begriffe wichtig, um mathematische Modell, d.h. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, für zufällige Phänomene zu konstruieren:

2.11. Bsp: Zweimaliger unabhängiger Münzwurf:

Für $i = 1, 2$ wird i-te Münzwurf modelliert durch $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, P_i)$ mit

$\Omega_i = \{1, \dots, 6\}$, $\mathcal{A}_i = \mathcal{P}(\Omega_i)$, P_i Gleichverteilung auf Ω_i

Nun Produktexperiment auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit:

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P(\{(w_1, w_2)\}) := P_1(\{w_1\}) \cdot P_2(\{w_2\})$.

Intuitiv: Durch diese Def. v. P wird Unabhängigkeit eingebaut! Genauer:

2.12. Produktexperimente bei diskreten W'räumen:

Für $n \in \mathbb{N}$ und $i = 1, \dots, n$ seien $(\Omega_i, \mathcal{P}(\Omega_i), P_i)$ diskrete W'räume mit Zähldichten f_i

$\Rightarrow \Omega := \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ höchst abzählbar, und

$f((w_1, \dots, w_n)) := f_1(w_1) \cdots f_n(w_n)$ definiert Zähldichte auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$

(denn: $f \geq 0$ und $\sum_{w \in \Omega} f(w) = \sum_{w_1 \in \Omega_1} \cdots \sum_{w_n \in \Omega_n} f_1(w_1) \cdots f_n(w_n) = 1 \cdots 1 = 1$)

Sei P das assoziierte W'maß auf Ω.

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ heißt ProduktW'raum, kurz: $\bigotimes_{i=1}^{n} (\Omega_i, \mathcal{P}(\Omega_i), P_i)$.

Für $i = 1, \dots, n$ betrachte $\mathcal{A}_i := \{\Omega_1 \times \dots \times \Omega_{i-1} \times A_i \times \Omega_{i+1} \times \dots \times \Omega_n : A_i \in \mathcal{P}(\Omega_i)\}$

Die $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ sind unabhängige Unter-σ-Algebren von $\mathcal{A}$.

Dies rechtfertigt zu sagen:

Die einzelnen Komponenten dieses Produktexperiments sind unabhängig.

Beweis:

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}(\Omega_1\times\dots\times A_i\times\dots\times\Omega_n)\Big) = P(A_1\times\dots\times A_n) = \sum_{\omega_1\in A_1,\dots,\omega_n\in A_n} f(\omega_1,\dots,\omega_n) =$$

$$= \sum_{\omega_1\in A_1,\dots,\omega_n\in A_n} f_1(\omega_1)\cdots f_n(\omega_n) = P_1(A_1)\cdots P_n(A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(\Omega_1\times\dots\times A_i\times\dots\times\Omega_n)$$ ■

Fazit: Produkt-W'räume modellieren unabhängige Experimente
(bei diskreten W'räumen; allg. Fall später analog!)

Frage: Modellierung von „gestuften" Problemen, wo keine Unabhängigkeit vorliegt.

Idee: Rückgriff auf 2.3(1): $P(A_1\cap\dots\cap A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1\cap\dots\cap A_{n-1})$

2.13. Modellierung allg. gestufter diskreter Experimente:

Experiment besteht aus $n\in\mathbb{N}$ Einzelexperimenten mit je höchst. abzählbaren Ergebnismengen Ω_i und $\mathcal{A}_i = \mathcal{P}(\Omega_i)$ $(i=1,\dots,n)$

Bekannt seien:

① Verteilung P_1 auf Ω_1 mit Zähldichte f_1 (1. Experiment).

② Für $i=2,\dots,n$; $\omega_1\in\Omega_1,\dots,\omega_i\in\Omega_i$

$f_i(\omega_i|\omega_1,\dots,\omega_{i-1}) :=$ W'keit für Ergebnis ω_i im i-ten Experiment unter der Bdg., daß „vorher" $\omega_1,\dots,\omega_{i-1}$ eingetreten sind.

f_i heißt bedingte Zähldichte,

es gilt $f_i(\omega_i|\omega_1,\dots,\omega_{i-1})\geq 0$ und $\sum_{\omega_i\in\Omega_i} f_i(\omega_i|\omega_1,\dots,\omega_{i-1}) = 1\ \forall\, \omega_1,\dots,\omega_{i-1}$

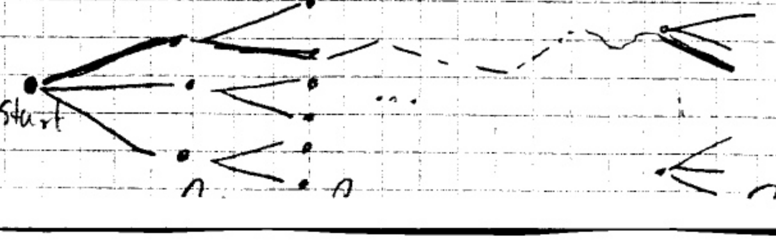
Modellierung des zusammengesetzten Problems durch $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$

mit $\Omega = \Omega_1\times\dots\times\Omega_n$ und P mit Zähldichte

$f(\omega_1,\dots,\omega_n) := f_1(\omega_1)\, f_2(\omega_2|\omega_1)\cdots f_n(\omega_n|\omega_1,\dots,\omega_{n-1})$

Denn $f\geq 0$ und $\sum_{\omega\in\Omega} f(\omega) = \sum_{\omega_1\in\Omega_1}\dots\underbrace{\sum_{\omega_n\in\Omega_n} f_n(\omega_n|\omega_1,\dots,\omega_{n-1})}_{=1}\cdots f_1(\omega_1) = \dots = 1$

Mögliche graphische Verdeutlichung durch Baummodell:



Kanten tragen „Übergangsw'keiten" (geg. durch $f_1, f_2, \ldots f_n$)
Elemente aus Ω entsprechen Pfaden im Baum
und W'keit für einen Pfad ist Produkt der W'keiten der Kanten.
Achtung: i.a. Echter Baum !!

2.14. Bsp.: Polyasches Urnenmodell:

Box enthalte anfangs w weiße u. s schwarze Kugeln
Sei $c \in \mathbb{Z}$, $c \geq -1$.
Ziehe n-mal Kugel
In jeder Ziehung: Ziehe Kugel und ersetze sie durch $c+1$ Kugeln gleicher Farbe.

Bsp.: $c = -1$: Ziehen ohne Zurücklegen.
$c = 0$: Ziehen mit Zurücklegen.
$c = 1$: „Vermehrung von Kugeln".

$c \geq 1$ Anwendung auf Populationsmodelle: Bakterien reproduzieren sich.

Modellierung: $\Omega_i = \{\bar{w}, \bar{s}\}$, $i = 1, \ldots, n$; $\Omega = \{\bar{w}, \bar{s}\}^n$
Bestimme Zähldichte $f = f^{(n)}$ (n Ziehungen).

2.15. Satz: Für $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega$ und $K := |\{i = 1, \ldots, n : \omega_i = \bar{s}\}|$:

$$f^{(n)}(\omega) = \frac{\prod_{i=0}^{n-K-1} (w + ic) \cdot \prod_{j=0}^{K-1} (s + jc)}{\prod_{l=0}^{n-1} (w + s + lc)}$$

Beweis durch Induktion nach n:

$n=1$: $f^{(1)}(\bar{s}) = \frac{s}{s+w}$, $f^{(1)}(\bar{w}) = \frac{w}{s+w}$ $\Rightarrow$ o.k.

$n \to n+1$: Unterscheide, ob letzte Kugel schwarz oder weiß.

Sei letzte schwarz $\Rightarrow \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \bar{s})$, seien in $\omega_1, \ldots, \omega_n$ K-mal $\bar{s}$

$$\Rightarrow f^{(n+1)}(\omega) = f^{(n)}((\omega_1, \ldots, \omega_n)) \cdot f_{n+1}(\bar{s} \mid (\omega_1, \ldots, \omega_n)) \underset{\text{Ind. annahme}}{=}$$

$$= \frac{\prod_0^{n-K-1} (w + ic) \prod_0^{K-1} (s + jc)}{\prod_0^{n-1} (w + s + lc)} \cdot \frac{s + Kc}{w + s + nc} = \ldots$$

Analog, falls letzte Kugel weiß! ■

Satz 2.15 und $\sum_{w \in \Omega} f^{(n)}(w) = 1$ aus 2.13 liefern:

2.16 Korollar. Für $n, s, w \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{Z}, c \geq -1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\prod_{i=0}^{n-k-1}(w+ic) \prod_{j=0}^{k-1}(s+jc)}{\prod_{l=0}^{n-1}(w+s+lc)} = 1$$

Bsp.:

① $c = 0$: „Ziehen mit Zurücklegen";
Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln $B_{n, s/(s+w)}$-verteilt.

② $c = -1$: „Ziehen ohne Zurücklegen", $n \leq s+w$ nötig

$$\Rightarrow P(\text{„}k\text{-mal wird } s \text{ gezogen"}) = \binom{n}{k} \frac{w(w-1)\cdots(w-(n-k)+1)\, s(s-1)\cdots(s-k+1)}{(w+s)(w+s-1)\cdots(w+s-n+1)}$$

$$= \binom{s}{k}\binom{w}{n-k} \Big/ \binom{s+w}{n}$$

Dies führt auf:

2.17. Def.:

Für $s, w, n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq s+w$ ist die hypergeometrische Verteilung $H_{s,w,n}$ auf $\Omega = \{0, \ldots, n\}$ geg. durch die Zähldichte

$$f_{s,w,n}(k) := \binom{s}{k}\binom{w}{n-k} \Big/ \binom{s+w}{n}$$

(Beachte: $f_{s,w,n}$ ist Zähldichte wg. 2.16!)

Bei Ziehen ohne Zurücklegen ist Zahl der gezogenen schwarzen Kugeln $H_{s,w,n}$-verteilt!

Bsp: $c = +1$ im Polyaschen Urnenmodell

$$\Rightarrow P(\text{„}k\text{-mal wird } s \text{ gezogen"}) = \binom{n}{k} \frac{w(w+1)\cdots(w+n-k-1)\, s(s+1)\cdots(s+k-1)}{(w+s)(w+s+1)\cdots(w+s+n-1)}$$

$$= \binom{s+k-1}{k}\binom{w+n-k-1}{n-k} \Big/ \binom{s+w+n-1}{n}$$