§ 3 Zufallsvariable und ihre Verteilungen

Häufig: Komplizierte stoch. Modell $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Wichtig sind nur gewisse (meist $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{R}^d$-wertige) Kenngrößen.

Bsp.: (1) Polyasches Urnenmodell $\Omega = \{\bar{s}, \bar{w}\}^n$
Wichtig: Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln.

(2) 2x Würfeln $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$ mit Gleichverteilung P
Augensumme ist Abb. $X : \Omega \to \mathbb{N}, (\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1 + \omega_2$.
Verteilung der Augensumme P_X mit Zähldichte
$f(2) = \frac{1}{36}, f(3) = \frac{2}{36}, f(4) = \frac{3}{36}, \dots f(12) = \frac{1}{36}$.

Im Allgemeinen sollten Abb. „verträglich" mit σ-Algebren sein; dazu:

3.1 Def:

(1) $\mathcal{A}$ σ-Algebra auf $\Omega \Rightarrow (\Omega, \mathcal{A})$ Meßraum

(2) $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ Meßräume $(i = 1, 2)$. Eine Abb. $X : \Omega_1 \to \Omega_2$ heißt $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$-meßbar, falls $\forall A \in \mathcal{A}_2 : X^{-1}(A) := \{\omega \in \Omega_1 : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{A}_1$
Sind $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ fix, so oft kurz: X meßbar

(3) $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W-raum, $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$ Meßraum, $X : \Omega \to \tilde{\Omega}$ $(\mathcal{A}, \tilde{\mathcal{A}})$-meßbar.
Dann heißt X Zufallsvariable.

3.2 Bem.:

(1) Begriff „Zufallsvariable" unglücklich, aber leider gebräuchlich.

(2) Bsp.: $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ diskreter W-raum $\Rightarrow$ Jede Abb. $X : \Omega \to \tilde{\Omega}$ ist Zufallsvariable (ZV)

Also: Augensumme bei 2x Würfeln etc. ist Zufallsvariable!!

(3) Analogie: Ana II: f stetig $\Leftrightarrow$ Urbilder offener Mengen offen
meßbar $\Leftrightarrow$ Urbilder v. $A \in \tilde{\mathcal{A}}$ aus $\mathcal{A}$.

3.3 Fakten: $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ Meßräume, $i = 1, 2, 3$.

(1) $X_1 : \Omega_1 \to \Omega_2$, $X_2 : \Omega_2 \to \Omega_3$ meßbar $\Rightarrow X_2 \circ X_1 : \Omega_1 \to \Omega_3$ meßbar.
denn: $A \in \Omega_3 \Rightarrow (X_2 \circ X_1)^{-1}(A) = X_1^{-1}(X_2^{-1}(A)) \in \mathcal{A}_1$

(2) Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega_2)$ mit $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{A}_2$ und $X: \Omega_1 \to \Omega_2$ so, daß $X^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1\ \forall A \in \underline{\underline{\mathcal{F}}}$. Dann X $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$-meßbar.

denn: $\tilde{\mathcal{A}} := \{A \in \Omega_2 : X^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1\}$ ist σ-Algebra (Übung!) auf Ω_2 mit $\mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow \mathcal{A}_2 = \sigma(\mathcal{F}) \subset \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow X$ meßbar ■

(3) Für beliebige Mengensysteme $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\mathcal{F}_1 \subset \sigma(\mathcal{F}_2)$ gilt: $\sigma(\mathcal{F}_1) \subset \sigma(\mathcal{F}_2)$.

Mit dieser simplen Beobachtung (3) definieren wir eine kanonische σ-Algebra auf $\mathbb{R}$:

3.4 Satz. Die von folgenden Mengensystemen auf $\mathbb{R}$ erzeugten σ-Algebren sind gleich:

(a) System $\mathcal{O}$ der offenen Mengen in $\mathbb{R}$,

(b) —"— $\mathcal{A}$ der abgeschlossenen —"—

(c) —"— $\mathcal{K}$ der kompakten —"—

(d) —"— $\mathcal{J}$ der Intervalle der Form $]a,b]$

(e) —"— $\tilde{\mathcal{J}}$ der offenen Intervalle der Form $]a,b[$

Die von (a)–(e) erzeugte σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ heißt Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$.

Beweis: $3.3(3) \Rightarrow \sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{A}) \supset \sigma(\mathcal{K})$ und $\sigma(\mathcal{O}) \supset \sigma(\mathcal{J})$.

Ferner: $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{K})$, denn: $A \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen $\Rightarrow A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap [-n,n]) \in \sigma(\mathcal{K})$

nun wende 3.3(3) an.

$\sigma(\mathcal{O}) \subset \sigma(\tilde{\mathcal{J}})$, denn $A \subset \mathbb{R}$ offen $\Rightarrow A = \bigcup_{]a,b[\subset A,\ a,b \in \mathbb{Q}}]a,b[\in \sigma(\tilde{\mathcal{J}})$

$\sigma(\tilde{\mathcal{J}}) \subset \sigma(\mathcal{J})$, denn: $]a,b[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]a, b - 1/n] \in \sigma(\mathcal{J})$

"$\supset$" analog ■

3.5 Def.:

(1) Die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ auf $\mathbb{R}^d$ ist die von den offenen Mengen in $\mathbb{R}^d$ erzeugte σ-Algebra.

Übung!, L) (2) Für $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ heißt $\mathcal{B}(\Omega) := \{A \cap \Omega : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ Borel-σ-Algebra auf Ω (einfache Übung: $\mathcal{B}(\Omega)$ ist σ-Algebra!)

3.6. Produkt-σ-Algebren: Seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ Meßräume für $i=1,\dots,n$

$$\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n := \bigotimes_{i=1,\dots,n} \mathcal{A}_i := \sigma(\{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{A}_i \text{ für } i=1,\dots,n\})$$

heißt Produkt-σ-Algebra der $\mathcal{A}_i$ auf $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$.

3.7 Satz: $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ Meßräume für $i=1,\dots,n$. Dann:

① Die Projektionen $p_i : \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n \to \Omega_i$, $(\omega_1,\dots,\omega_n) \mapsto \omega_i$ sind $(\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n, \mathcal{A}_i)$-meßbar für $i=1,\dots,n$.

② Für Abbildungen $X_i : \Omega \to \Omega_i$ $(i=1,\dots,n)$ gilt:
$\forall i=1,\dots,n$ ist X_i meßbar $\Leftrightarrow$ Die Produktabbildung
$X := (X_1,\dots,X_n) : \Omega \to \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$, $\omega \mapsto (X_1(\omega),\dots,X_n(\omega))$ ist $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n)$-meßbar.

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "X"] \arrow[dr, "X_i"'] & \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n \arrow[d, "p_i"] \\ & \Omega_i \end{tikzcd}$$

Beweis: ① Für $A_i \in \mathcal{A}_i$ ist $p_i^{-1}(A_i) = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_{i-1} \times A_i \times \Omega_{i+1} \times \dots \times \Omega_n$ aus $\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$ $\Rightarrow$ p_i meßbar.

② „$\Leftarrow$": X, p_i meßbar $\Rightarrow$ $X_i = p_i \circ X$ meßbar.

„$\Rightarrow$": Seien $A_i \in \mathcal{A}_i$ $(i=1,\dots,n)$ $\Rightarrow$ $X^{-1}(A_1 \times \dots \times A_n) = X_1^{-1}(A_1) \cap \dots \cap X_n^{-1}(A_n)$ $\in \mathcal{A}$ $\Rightarrow$ Mengen der Form $A_1 \times \dots \times A_n$ haben Urbilder in $\mathcal{A}$.
Da diese Mengen die Produkt-σ-Algebra erzeugen, ist X meßbar wg. 3.3(2) ■

Anwendung auf Borel-σ-Algebren:

3.8 Satz:

① $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig $\Rightarrow$ f Borel-meßbar, d.h. $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$-meßbar.

② $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \dots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$

③ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W'raum. Dann sind $X_1,\dots,X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ (Borel-meßbare) ZV'e genau dann, wenn $(X_1,\dots,X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ n-dim (Borel-meßbare) ZV'e ist.

④ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W'raum, $X_1,\dots,X_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$ ZV'e; $f : \mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ stetig $\Rightarrow$ $f(X_1,\dots,X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^m$ ZV'e.

Konvention: $\mathbb{R}^d$ stets mit Borel-σ-Algebra versehen.
„$X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to \mathbb{R}^d$ ZV'e" heißt X $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$-meßbar.

Beweis: (1) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ stetig, d.h. $\forall A\subset\mathbb{R}^m$ offen ist $f^{-1}(A)\subset\mathbb{R}^n$ offen, d.h. in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Def. der Borel-$\sigma$-Algebra + 3.3(2) $\Rightarrow f$ messbar.

(2) Sei $H\subset\mathbb{R}^n$ offen $\Rightarrow H = \bigcup_{\substack{a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\in\mathbb{Q}\\ \text{mit } Q\subset H}} \underbrace{]a_1,b_1[\times\dots\times]a_n,b_n[}_{=:Q}$

$\Rightarrow H\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\dots\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\dots\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Zur Umkehrung: Betrachte $p_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}, (x_1,\dots,x_n)\mapsto x_i$ stetig für $i=1,\dots,n$

$\Rightarrow p_i$ $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-messbar $\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd}(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \arrow[r, "Id"] \arrow[dr, "p_i"'] & (\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\dots\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})) \arrow[d, "p_i"] \\ & \mathbb{R}\end{tikzcd}$$

Also mit Satz 3.7(2): Id messbar $\Rightarrow$ $\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\dots\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})\subset\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

(3) Klar mit (2) + 3.7(2); (4) Klar mit 3.3(1) ■

3.9 Bemerkungen

(1) $X_1,\dots,X_n:(\Omega,\mathcal{A},P)\to\mathbb{R}^d$ ZV'e $\overset{3.8(4)}{\Rightarrow} X_1+\dots+X_n:\Omega\to\mathbb{R}^d$ ZV'e.

Dies gilt auch für kompliziertere Kompositionen!

(2) $\overline{\mathbb{R}}:=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ wird mit erweiterter Borel-σ-Algebra

$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}):=\{A\subset\overline{\mathbb{R}}: A\cap\mathbb{R}\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ versehen.

Nun Verteilungen von Zufallsvariablen.

3.10 Def. Sei $(\Omega,\mathcal{A},P)$ W'raum, $(\tilde\Omega,\tilde{\mathcal{A}})$ Messraum, $X:\Omega\to\tilde\Omega$ ZV'e.
Für $A\in\tilde{\mathcal{A}}$ setze $P_X(A):=P(X^{-1}(A))=:P(X\in A)$ (= Wkeit, daß X Werte in A annimmt)

Dann ist P_X W'maß auf $(\tilde\Omega,\tilde{\mathcal{A}})$. Es heißt <u>Bildmaß von P unter X</u>, oder Verteilung von X.

Bsp: $\tilde\Omega=\mathbb{R}^d$, $\tilde{\mathcal{A}}=\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $X:\Omega\to\mathbb{R}^d \Rightarrow P_X$ W'maß auf $\mathbb{R}^d$.

Beweis, daß P_X W'maß ist: $P_X(\tilde\Omega)=P(X^{-1}(\tilde\Omega))=P(\Omega)=1$ und

$A_i\in\tilde{\mathcal{A}}$ disjunkt, $i\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow P_X(\bigcup A_i)=P(X^{-1}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i))=P(\underbrace{\bigcup_{i\in\mathbb{N}}X^{-1}(A_i)}_{\text{disjunkt!}})\overset{P\ \sigma\text{-add.}}{=}$

$=\sum_{i\in\mathbb{N}}P(X^{-1}(A_i))=\sum_{i\in\mathbb{N}}P_X(A_i)$.

3.11 Bsp.: n-maliger Münzwurf mit mögl. Ausgängen 1 und 0 mit W'keiten 1/2

Modell: $\Omega = \{0,1\}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, P = Gleichverteilung.

Die ZV'e $X: \Omega \to \{0, \dots, n\}$, $X(\omega_1, \dots, \omega_n) := \omega_1 + \dots + \omega_n$ beschreibt „Anzahl der Einsen"

Verteilung P_X auf $\tilde{\Omega} = \{0, \dots, n\}$ geg. durch Zähldichte f_X zu P_X:

$f_X(k) = P_X(\{k\}) = P(\{\omega : X(\omega) = k\}) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n = B_{n,1/2}(\{k\})$.

Also: X bzw. „Anzahl der Einsen" ist $B_{n,1/2}$-verteilt.

Nun Verallgemeinerung der Unabhängigkeit auf ZVe:

3.12 Def.: $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W'raum, $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ Meßräume, $X_i : \Omega \to \Omega_i$ ZVe für $i \in I$. Dann:

(a) $\sigma(X_i) := \{X_i^{-1}(A_i) : A_i \in \mathcal{A}_i\} \subset \mathcal{A}$ heißt die von X_i erzeugte σ-Algebra (Übung: $\sigma(X_i)$ ist σ-Algebra!!).

(b) $(X_i)_{i \in I}$ heißen unabhängig $:\Leftrightarrow$ $(\sigma(X_i))_{i \in I}$ unabhängig (vgl. §2.7!).

3.13 Bsp.: n-maliger Münzwurf wie in 3.11

$X_i : \Omega = \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, $(\omega_1, \dots, \omega_n) \mapsto \omega_i$ beschreibt Ergebnis des i-ten Wurfs.

$\sigma(X_i) = \{\{0,1\} \times \dots \times \{0,1\} \times \underset{i}{A} \times \{0,1\} \times \dots \times \{0,1\} : A \subset \{0,1\}\}$

§2 $\Rightarrow$ $\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_n)$ unabhängig $\Rightarrow$ $X_1, \dots, X_n$ unabhängig!

Fazit: Formale und intuitive Begriffsbildung passen zusammen!

Zusammenstellung verschiedener Schreibweisen:

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W'raum, $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$ Meßraum (oft $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$, $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{B}(\tilde{\Omega})$.)

$X : \Omega \to \tilde{\Omega}$ ZV'e, $B \in \tilde{\mathcal{A}}$. Dann:

$P(\text{„}X \text{ nimmt Werte in } A \text{ an"}) := P(X \in B) := P_X(B) := P(X^{-1}(B))$