§4 Markov-Ketten und stochastische Matrizen

Häufig: Zufällige Phänomene, die zeitliche Reihenfolge haben.

Bsp.: Preisentwicklung von Aktien, Polyasche Urnenmodell, Warteschlange in Mensa, ...

Allg. Modellierung durch sog. stochastische Prozesse:

4.1 Def.: $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W'raum; $(E, \hat{\mathcal{A}})$ Meßraum, $I \subset \mathbb{R}$ „Zeitbereich"

① Familie $(X_t)_{t \in I}$ von ZV'en $X_t : \Omega \to E$ heißt stoch. Prozeß mit Zustandsraum E und Zeitbereich I.

Häufig: $I = \mathbb{N}_0$ („zeitdiskret") oder $I = [0, \infty[$ mit 0 als Startzeit

② Ist in ① E höchst. abzählbar und $\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{P}(E)$, so sagen wir, daß $(X_t)_{t \in I}$ einen diskreten Zustandsraum hat.

Im folgenden nur: zeitdiskrete Prozesse $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ auf diskreten $E = \{a_1, a_2, \ldots\}$.

Motiviert durch §2.13 gibt man sich hier vor:

ⓐ Startverteilung P_{X_0} (W'maß auf E) mit Zähldichte f_0;

ⓑ „Übergangsw'keiten" von Zeiten $(0, \ldots, n)$ nach $n+1$ durch bedingte Zähldichten

$$f(b \mid b_0, \ldots, b_n) := \underbrace{P_{(b_0, \ldots, b_n), b}}_{\text{sog. Übergangsw'keiten}} := P(X_{n+1} = b \mid X_0 = b_0, \ldots, X_n = b_n) \in [0,1]$$

$(n \in \mathbb{N}_0,\ b, b_0, \ldots, b_n \in E)$

Häufig: X_0 deterministisch, d.h. $\exists$ Startwert $b_0 \in E$ mit $f_0(b) = \delta_{b, b_0} = \begin{cases} 0 & b \neq b_0 \\ 1 & b = b_0 \end{cases}$

Beispiele:

① Polyasches Urnenmodell, $c = -1$: Ziehen ohne Zurücklegen.

X_i = Ergebnis d. $(i+1)$-ten Ziehung, vgl. §2.14.

② Ruinspiel: 2 Spieler starten mit Kapital 10 bzw. 20 Euro. In jeder Runde gewinnt / verliert Spieler 1 von / an Spieler 2 1 Euro mit W'keit $1/2$. Spiel endet, sobald ein Spieler ruiniert ist.

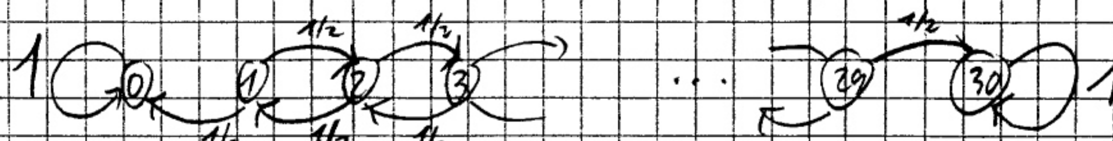
$E = \{0, 1, 2, \ldots, 30\}$ beschreibt mögl. Kapital von Spieler 1

$(X_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ beschreibe Kapital von Spieler 1 nach i-ter Runde.

Also: ① Start mit 10 Euro ⇒ deterministischer Start mit Startwert $b_0 = 10$.

② Verteilung des Kapitals z. Zeit $i+1$ nur abhängig von Kapital z. Zeit i (und nicht von früheren Zeiten)

Beschreibe in dieser vereinfachten Situation Übergangsw'keiten durch Graph:



Also: $$P_{(b_0,\dots,b_i),b} = \begin{cases} 1/2 & \text{falls } b_i \neq 0,30 \text{ und } |b-b_i| = 1 \\ 1 & b = b_i \in \{0,30\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Prozesse mit der in ② genannten Eigenschaft heißen Markov-Ketten:

42. Def: Sei $I = \mathbb{N}_0$ oder $[0,\infty[$. Ein stoch. Prozeß $(X_t)_{t\in I}$ mit diskretem Zustandsraum E heißt Markov-Prozeß, falls folgende Markov-Bdgg gilt:

(M) $$\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N},\ t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} \in I,\ a_0,\dots,a_{n+1}\in E \text{ mit } P(X_{t_0}=a_0,\dots,X_{t_n}=a_n) > 0 \\ P(X_{t_{n+1}} = a_{n+1} \mid X_{t_0}=a_0,\dots,X_{t_n}=a_n) = P(X_{t_{n+1}}=a_{n+1} \mid X_{t_n}=a_n) =: p^{n+1}_{a_n,a_{n+1}} \end{cases}$$

Deutung: Bei Kenntnis von Zustand a_n z. Zeit t_n ist Zukunft von früheren Zeiten $t < t_n$ „unabhängig".

Zum besseren Verständnis:

43. Lemma: $(\Omega,\mathcal{A},P)$ W'raum, $I \subset \mathbb{N}_0$, $(C_i)_{i\in I} \subset \mathcal{A}$ disjunkt mit $P(C_i) > 0\ \forall i$. Sei $A\in\mathcal{A}$ mit $P(A|C_i) = P(A|C_j)\ \forall i,j \Rightarrow P(A|\bigcup_{i\in I} C_i) = P(A|C_j)\ \forall j$.

Beweis: $C := \bigcup_{i\in I} C_i \Rightarrow P(A|C_j)\,P(C) = P(A|C_j)\cdot\sum_{i\in I} P(C_i) = \sum_{i\in I} P(A|C_i)\,P(C_i)$

$= \sum_i P(A\cap C_i) = P(A\cap C) = P(A|C)\cdot P(C)$; Da $P(C) > 0$, folgt Beh. ∎

44. Satz: Für stoch. Prozeß $(X_t)_{t\in I}$, $I = \mathbb{N}_0$ oder $[0,\infty[$ mit diskretem Zustandsraum E sind äquivalent:

① $(X_t)_{t\in I}$ ist Markov-Kette;

② $\forall n\in\mathbb{N},\ t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} \in I,\ a_0,\dots,a_{n+1}\in E$ mit $P(X_{t_0}=a_0,\dots,X_{t_n}=a_n) > 0$ ist $P(X_{t_{n+1}}=a_{n+1} \mid X_{t_0}=a_0,\dots,X_{t_n}=a_n)$ von $a_0,\dots,a_{n-1}$ unabhängig.

(3) $\forall\, n,m \in \mathbb{N},\ t_0<t_1<\dots<t_n<s_1<\dots<s_m,\ A\subset E^n,\ B\subset E^m,\ a\in E$:

$$P\big((X_{s_1},\dots,X_{s_m})\in B \mid X_{t_n}=a,\ (X_{t_0},\dots,X_{t_{n-1}})\in A\big) = P\big((X_{s_1},\dots,X_{s_m})\in B \mid X_{t_n}=a\big).$$

Beweis: (3) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2) Klar.

(2) $\Rightarrow$ (1): Nutze Lemma 43 mit $C_{a_0,\dots,a_{n-1}} := \{\omega : X_{t_0}(\omega)=a_0,\dots,X_{t_n}(\omega)=a_n\}$

Dann $\bigcup_{a_0,\dots,a_{n-1}\in E} C_{a_0,\dots,a_{n-1}} = \{\omega : X_{t_n}(\omega)=a_n\}$.

(1) $\Rightarrow$ (3): Sei $B=\{(b_1,\dots,b_m)\}$, $b_j\in E$.

Für $(a_0,\dots,a_{n-1})\in E^n$ mit $P(X_{t_0}=a_0,\dots,X_{t_{n-1}}=a_{n-1})>0$ gilt:

$$P(X_{s_1}=b_1,\dots,X_{s_m}=b_m \mid X_{t_0}=a_0,\dots,X_{t_n}=a_n) = \frac{P(X_{t_0}=a_0,\dots,X_{t_n}=a_n,X_{s_1}=b_1,\dots,X_{s_m}=b_m)}{P(X_{t_0}=a_0,\dots,X_{t_n}=a_n)}$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{P(X_{t_0}=a_0)\cdots(\text{wie Nenner})\cdots P(X_{s_m}=b_m\mid X_{s_{m-1}}=b_{m-1})}{P(X_{t_0}=a_0)\,P(X_{t_1}=a_1\mid X_{t_0}=a_0)\,P(X_{t_2}=a_2\mid X_{t_1}=a_1,\cancel{X_{t_0}=a_0})\cdots P(X_{t_n}=a_n\mid X_{t_{n-1}}=a_{n-1})}$$

$$= P(X_{s_1}=b_1\mid X_{t_n}=a_n)\cdot P(X_{s_2}=b_2\mid X_{s_1}=b_1)\cdots P(X_{s_m}=b_m\mid X_{s_{m-1}}=b_{m-1}) =: R$$

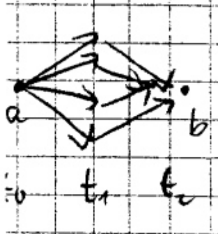
R ist unabh. von $a_0,\dots,a_{n-1}$. Wie in (2) $\Rightarrow$ (1) liefert Lemma 43:

$$R = P(X_{s_1}=b_1,\dots,X_{s_m}=b_m\mid X_{t_n}=a_n) = P(\dots\mid X_{t_n}=a_n, X_{t_{n-1}}=a_{n-1}\dots)$$
$$= P(\ \text{—"—}\ \mid X_{t_n}=a_n,\ (X_{t_0},\dots,X_{t_{n-1}})\in A).$$

Da für jede $H\subset\Omega$, $P(H)>0$ $A\mapsto P(A\mid H)$ W'maß ist, liefert das gezeigte die allg. Aussage, d.h. für B mit $|B|>1$ ■

45. Regeln f. Markov-Ketten:

(1) $t_0<t_1<t_2\in I$, $a,b\in E$ mit $P(X_{t_0}=a)>0$ $\Rightarrow$



Chapman-Kolmogorov-Gleichg.: $P(X_{t_2}=b\mid X_{t_0}=a) = \sum_{c\in E} P(X_{t_1}=c\mid X_{t_0}=a)\,P(X_{t_2}=b\mid X_{t_1}=c)$

denn: $P(X_{t_2}=b, X_{t_0}=a) = \sum_{c\in E} P(X_{t_2}=b, X_{t_1}=c, X_{t_0}=a) = \sum_c P(X_{t_2}=b\mid X_{t_1}=c, \cancel{X_{t_0}=a}) \cdot P(X_{t_1}=c, X_{t_0}=a)$

Division d. $P(X_{t_0}=a)>0$ $\Rightarrow$ Beh.

(2) $\forall\, 0<t_1<\dots<t_n$, $a_0,\dots,a_n\in E$:

$$P(X_{t_0}=a_0,\dots,X_{t_n}=a_n) = P(X_{t_0}=a_0)\,P(X_{t_1}=a_1\mid X_{t_0}=a_0)\cdots P(X_{t_n}=a_n\mid X_{t_{n-1}}=a_{n-1})$$

$\Rightarrow$ Verteilg von $(X_{t_0},\dots,X_{t_{n-1}}) : \Omega\to E^{n+1}$ geg. durch Startverteilg $P_{X_{t_0}}$ und Übergangsw'keiten.

4.6. Konstruktion von Markov-Ketten mit $I = \mathbb{N}_0, [0,\infty[$:

Vorgabe von:

ⓐ Startverteilung: $P_{X_0} \hat{=} (p_1, p_2, \ldots) =: p$ Zeilenvektor

Dabei: $E = \{a_1, a_2, \ldots\}$, $p_i = P(X_0 = a_i)$, $\sum_i p_i = 1$.

ⓑ Übergangs-W'keiten: $S(t_1, t_2) := (S(t_1,t_2)_{i,j})_{i,j \in E}$ für $t_1 \le t_2 \in E$

Dabei $P(X_{t_2} = j \mid X_{t_1} = i) = S(t_1, t_2)_{i,j}$

Bedingungen an die $S(t_1,t_2)_{i,j}$:

① $\forall i,j$: $S(t_1,t_2)_{i,j} \geq 0$.

② $\forall i$: $\sum_{j \in E} S(t_1,t_2)_{i,j} = 1$

③ Chapman-Kolmogorov-Gl.:

ⓒ $\forall t_1 \le t_2 \le t_3,\ i,j \in E$: $\sum_{k \in E} S(t_1,t_2)_{i,k}\, S(t_2,t_3)_{k,j} = S(t_1,t_3)_{i,j}$

Algebraisch. $\forall t_1 \le t_2$ ist $S(t_1,t_2) = (S(t_1,t_2))_{i,j \in E}$ eine evtl. unendliche, quadratische Matrix

Bed'gen ①, ② besagen: $S(t_1,t_2)$ ist sog. stochastische Matrix

Bdgg. ③ besagt: $S(t_1,t_2)\, S(t_2,t_3) = S(t_1,t_3)$.

Wir zeigen in Stoch. II:

4.7 Satz. Ist E höchst. abzählbar, und ist die Familie $(S(t_1,t_2))_{t_1 \le t_2 \in I}$ von stoch. Matrizen gegeben mit Bed'gen ①, ②, ③ oben, so existiert zu jeder Startverteilung eine Markov-Kette $(X_t)_{t \in I}$ mit diesen Daten.

4.8. Zeithomogene Markov-Ketten: Neue Einschränkungen:

Ⓘ $E = \{1, \ldots, R\}$ endlich $\Rightarrow S(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^{R \times R}$.

Ⓘⓘ $I = \mathbb{N}_0$

Ⓘⓘⓘ Markov-Kette ist zeithomogen, d.h. die Übergangsmatrix $S(n, n+1)$ ist von $n \in \mathbb{N}_0$ unabhängig. Sei $S := S(n,n+1)$

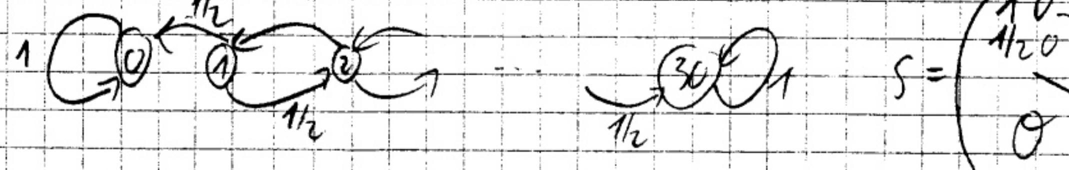
Chapman-Kolmogorov-Gl. $\Rightarrow$ $\forall n, m \in \mathbb{N}_0$: $S(n, n+m) = S^m$

und: $\forall n \in \mathbb{N}_0$ ist Verteilung P_{X_n} z. Zeit n geg. durch Zeilen-Vektor $p \cdot S^n$

denn: $\forall i \in E$: $P(X_n = i) = \sum_j P(X_0 = j)\, P(X_n = i \mid X_0 = j) = \sum_j p_j (S^n)_{j,i}$

Merkregel: Alle Verteilungsdaten einer zeithomogenen Markov-Kette bestimmt durch Startverteilung p ⊕ Übergangsmatrix S.

Bsp: Ruinspiel, $E=\{0,1,\dots,30\}$



$$S=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Allg.: Hat S viele Nullen, so S effizient durch Übergangsgraph beschreibbar!

Nun Lösung konkrete Probleme f. zeithomogene Markov-Ketten $(X_n)_{n\geq 0}$ auf $E=\{1,2,\dots,R\}$ mit Übergangsmatrix $S=(p_{ij})_{i,j=1,\dots,R}$.

4.8. Auftreffw'keiten: Sei $A\subset E$ und

$$T_A:\Omega\to\mathbb{N}_0\cup\{\infty\},\quad T_A(\omega):=\begin{cases}\min\{n\in\mathbb{N}_0: X_n(\omega)\in A\} & \text{falls } n \text{ existiert}\\ \infty & \text{sonst.}\end{cases}$$

T_A beschreibt Zeit d. ersten Eintreffens von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in A.

Frage: Sei $r\in E$ Startpkt. einer Markov-Kette, $A\subset E$.

$$\Rightarrow \quad \alpha_r^A := P(T_A<\infty \mid X_0=r) = ?$$

4.9 Satz. $\forall A\subset E,\ r\in E:$

$$\alpha_r^A=\begin{cases}1 & \text{falls } r\in A \text{ (klar)}\\ \sum_{b\in E} p_{rb}\,\alpha_b^A & \text{falls } r\notin A.\end{cases}$$

Beweis der unteren Gleichung intuitiv klar; Formal: $\forall r\in E\setminus A,\ n\in\mathbb{N}$:

$$P(T_A\leq n+1 \mid X_0=r) = P(\exists k\in\{1,\dots,n+1\}: X_k\in A \mid X_0=r) =$$

$$= \sum_{\substack{(a_1,\dots,a_{n+1})\in E^n \text{ mit } a_i\in A \\ \text{für mind. ein } i}} P(X_1=a_1,\dots,X_{n+1}=a_{n+1} \mid X_0=r) =$$

$$= \sum_{b\in E\setminus A}\ \sum_{\substack{a_2,\dots,a_{n+1}: a_i\in A \text{ für mind. ein } i=2,\dots,n+1}} p_{rb}\cdot \underbrace{P(X_2=a_2,\dots,X_{n+1}=a_{n+1} \mid X_1=b)}_{=P(X_1=a_2,\dots,X_n=a_n \mid X_0=b)} + \sum_{b\in A} p_{rb}\cdot 1$$

$$= \underset{\text{wie oben}}{\dots} = \sum_{b\in E} p_{r,b}\, P(T_A\leq n \mid X_1=b) \quad \Rightarrow$$

$$P(T_A < \infty \mid X_0 = r) = P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{T_A \le n+1\} \mid X_0 = r\Big) = \frac{P\big(\bigcup\{T_A \le n+1\} \cap \{X_0 = r\}\big)}{P(X_0 = r)}$$

$$\underset{[\S 5]}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{P(\{T_A \le n+1\} \cap \{X_0 = r\})}{P(X_0 = r)} = \lim_{n\to\infty} P(T_A \le n+1 \mid X_0 = r) =$$

$$= \sum_{b\in E} \lim_{n\to\infty} \{p_{rb}\, P(T_A \le n \mid X_0 = b)\} = \sum_{b\in E} P(T_A < \infty \mid X_0 = b) \qquad \blacksquare$$

4.10. Bsp: Ruinspiel: 2 Spieler mit Startkapital $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ anfangs.
W'keit für Gewinn/Verlust gleich $1/2$ wie früher.
Spiele, bis einer ruiniert ist.

Frage: $P(\text{Spieler 1 wird irgendwann ruiniert}) = ?$

Lsg.: $E = \{0, 1, \dots, N_1+N_2\}$, $A = \{0\}$, $\alpha_i := P(T_A < \infty \mid X_0 = i)$.

Dann: $\alpha_0 = 1$, $\alpha_{N_1+N_2} = 0$ und:

Satz 4.9 $\Rightarrow$ (*) $\alpha_i = \frac{1}{2}(\alpha_{i+1} + \alpha_{i-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, N_1+N_2-1)$.

$V := \{(\alpha_i)_{i=0,1,\dots,N_1+N_2} \subset \mathbb{R}^{N_1+N_2+1} : (*) \text{ gilt}\}$ ist 2-dim. Untervektorraum (N_1+N_2-1 lin. unabh. Gleichungen!);

Ferner sind für $c, d \in \mathbb{R}$: $(\alpha_i = c + d i)_{i=0,1,\dots,N_1+N_2} \in V$

$\Rightarrow$ Dies sind alle Lösungen.

Randbdgg.: $\alpha_0 = 1 \Rightarrow c = 1$

$\alpha_{N_1+N_2} = 0 \Rightarrow 1 + \frac{d}{N_1+N_2} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_i = 1 - \frac{i}{N_1+N_2}}$

$\Rightarrow P(\text{Spieler 1 wird irgendwann ruiniert}) = \alpha_{N_1} = N_2/(N_1+N_2)$.

4.11 Stationäre Verteilungen: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zeithomogene Markov-Kette, $|E| < \infty$, $S \in \mathbb{R}^{R\times R}$ Übergangsmatrix.

Ein Zeilenvektor $w = (w_1, \dots, w_R) \in \mathbb{R}^R$ heißt stationäre Verteilung $:\Leftrightarrow$
$w \cdot S = w$, $w_i \ge 0 \ \forall i = 1, \dots, R$ und $\sum_{i=1}^{R} w_i = 1$.

Beachte:

① S stoch. Matrix, d.h. Zeilensummen sind 1 $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ EV zum EW 1.

② Wenn stat. Verteilung w existiert, ist w Zeileneigenvektor von S zum EW 1.
Es ist aber unklar, ob Zeilen-EV mit Einträge ≥ 0 existiert!

(3) Es gilt (ohne Beweis):

<u>Satz:</u> Jede stoch. Matrix $S \in \mathbb{R}^{R\times R}$ hat mind. eine stationäre Verteilung.

(4) Stationäre Verteilungen sind i.a. nicht eindeutig; Bsp.: $S = I_R$.

(5) Deutung: w stationäre Verteilung von S; $(X_n)_{n\geq 0}$ Markov-Kette mit Übergangsmatrix S und Startverteilung $w = P_{X_0}$ $\Rightarrow$ $P_{X_n} = w \ \forall n \in \mathbb{N}_0$.

4.12 Satz. Annahme: $\exists L \in \mathbb{N}: (S^L)_{ij} > 0 \ \forall i,j$

$\Rightarrow$ $\exists$ eindeutige stationäre Verteilung w, und $\lim\limits_{n\to\infty} S^n = \begin{pmatrix} w \\ w \\ \vdots \\ w \end{pmatrix}$.

Beweis: Sei $S^n = (p_{ij}^n)_{i,j=1,\dots,R}$, $m_j^n := \min\limits_i p_{ij}^n$, $M_j^n := \max\limits_i p_{ij}^n$

Dann: $m_j^{n+1} = \min\limits_i \left(\sum_k p_{ik} p_{kj}^n\right) \geq \min\limits_i \left(\underbrace{\sum_k p_{ik}}_{=1} m_j^n\right) = m_j^n$

Analog $M_j^{n+1} \leq m_j^n$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, j = 1,\dots,R: \quad m_j^n \leq m_j^{n+1} \leq M_j^{n+1} \leq m_j^n \Rightarrow$ Konvergenz f. $n\to\infty$.

Sei $\delta := \min\limits_{i,j=1,\dots,R} p_{ij}^L > 0 \Rightarrow$

$$M_j^{n+L} - m_j^{n+L} \underset{i,k \text{ passend}}{=} p_{kj}^{n+L} - p_{ij}^{n+L} = \sum_l \underbrace{\left(p_{kl}^L - p_{il}^L\right)}_{=: w_l} p_{lj}^n$$

$$\leq \underbrace{\left(\sum_{l: w_l \geq 0} w_l\right)}_{=: c} M_j^n + \underbrace{\left(\sum_{l: w_l < 0} w_l\right)}_{= -c} m_j^n = c \cdot (M_j^n - m_j^n) \underset{\text{Annahme!}}{\leq} (1-\delta)(M_j^n - m_j^n)$$

Induktion $\Rightarrow$ $M_j^{n+kL} - m_j^{n+kL} \leq (1-\delta)^k \cdot 1 \xrightarrow{k\to\infty} 0$

Fazit: $(M_j^n)_n$ und $(m_j^n)_n$ konvergieren ggg. gleichen Limes $\varrho_j \in [0,1]$

$$\Rightarrow S^n \xrightarrow{n\to\infty} \begin{pmatrix} \varrho_1 & \varrho_2 & \dots & \varrho_R \\ \vdots & & & \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \dots & \varrho_R \end{pmatrix} =: \tilde{S},$$

S^n stochastisch $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\tilde{S}$ stochastisch $\Rightarrow$ $\sum_{j=1}^{n} \varrho_j = 1$.

und $\tilde{S} = \lim\limits_n S^{n+1} = (\lim\limits_n S^n) \cdot S = \tilde{S} \cdot S$ $\Rightarrow$ $(\varrho_1, \dots, \varrho_n)$ stationäre Verteilung.

Eindeutigkeit: w sei eine stat. Verteilung $\Rightarrow$ $wS = w$ $\Rightarrow$

$wS^n = w \ \forall n \Rightarrow w = w\tilde{S} = (w_1, \dots, w_n) \begin{pmatrix} \varrho_1 & \dots & \varrho_n \\ \varrho_1 & \dots & \varrho_n \end{pmatrix} = (\varrho_1, \dots, \varrho_n)$

$\Rightarrow$ Beh. ∎

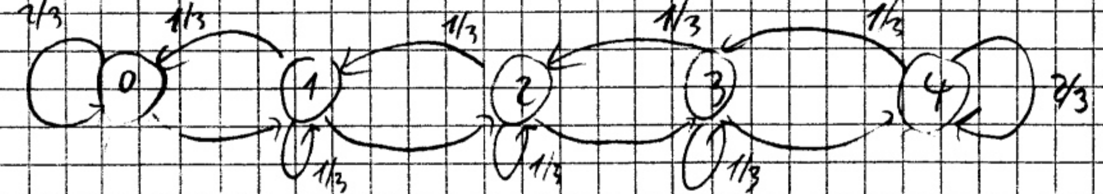
4.13 Bsp: Warteschlange an Kasse:

Annahmen: In n-ter Minute der Öffnung kommen Y_n neue Kunden unabhängig voneinander; $P(Y_n = k) = 1/3$ $k = 0,1,2$.
Maximal 4 Kunden in Schlange (sonst gehen sie ohne Ware).
In jeder Minute wird genau 1 Kunde bedient (falls vorhanden).

Ziel: Modelliere Länge der Schlange durch Markov-Kette $(X_n)_{n\geq 0}$.

$X_n \hat{=}$ Länge der Schlange in n-ter Minute

$E = \{0,1,\dots,4\}$.



Start in 0 deterministisch.

Fragen:
- Langzeitverhalten von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$; „mittleres Verhalten".
- Wie oft gehen Leute ohne Ware ⇝ lohnt sich neue Kasse.

$$S = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & & & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & & \\ & 1/3 & 1/3 & 1/3 & \\ 0 & & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ & & & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

S^4 hat lauter positive Einträge.

Satz 4.12 $\Rightarrow \exists_1$ stationäre Verteilung w, und $S^n \to \begin{pmatrix} w \\ \vdots \\ w \end{pmatrix}$

Berechnung: $wS = w \iff w(S-I) = 0$ und $w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1$

Rechnung $w_0 = w_1 = \dots = w_4 = 1/5$.