§5 Verteilungen auf $\mathbb{R}^d$

$\mathbb{R}^d$ mit Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ versehen

Ziel: Konstruktion von W'maßen auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Dazu:

5.1 Grundbegriffe der Maßtheorie: Ω Menge.

(1) $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ Ring $:\Leftrightarrow$ $\emptyset \in \mathcal{R}$ und $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B,\ A \setminus B \in \mathcal{R}$

(2) Sei $\mathcal{R}$ Ring über Ω. Eine Abb. $\mu: \mathcal{R} \to [0,\infty]$ heißt Inhalt falls: $\forall n \in \mathbb{N},\ A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R}$ disjunkt: $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$.
(d.h. μ endlich additiv; dabei Konvention: $\infty + x = \infty \ \forall x \in [0,\infty]$)

(3) Ein Inhalt μ auf Ring $\mathcal{R}$ heißt Prämaß, falls μ σ-additiv ist wie folgt:
$\forall (A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ disjunkt mit $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i =: A \in \mathcal{R}$: $\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \in [0,\infty]$

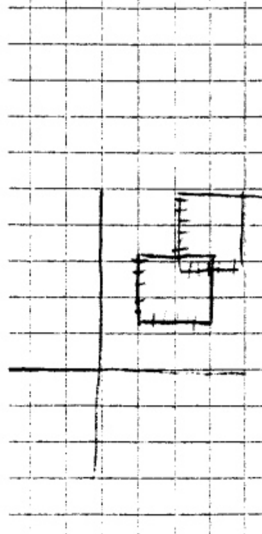
(4) Ein Prämaß μ auf einer σ-Algebra heißt Maß, und $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt Maßraum.

5.2 Bemerkungen

(1) $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W'raum $\Leftrightarrow$ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ Maßraum und $P(\Omega) = 1$.

(2) σ-Algebra $\Rightarrow$ Algebra $\Rightarrow$ Ring

(3) Bsp.: $\Omega = \mathbb{R}$;
$\mathcal{R} := \left\{ \bigcup_{i=1}^{n}]a_i, b_i] : a_i, b_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$ Ring der halboffenen Intervalle
Es gilt: $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.



(4) Bsp.: $\Omega = \mathbb{R}^d$
$\mathcal{R}_d := \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} \left( ]a_{i1}, b_{i1}] \times \dots \times]a_{id}, b_{id}] \right) : a_{11}, \dots, b_{nd} \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$
heißt Ring der halboffenen Quader in $\mathbb{R}^d$

5.3 Lemma (Charakterisierung von Prämaßen): P Inhalt auf Ring $\mathcal{R}$ über Ω mit $P(A) < \infty \ \forall A \in \mathcal{R}$. Dann sind äquivalent:

(1) P Prämaß,

(2) $\forall (A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ mit $A_{i+1} \subset A_i \ \forall i$ und $\bigcap_i A_i = \emptyset$: $\lim_{i \to \infty} P(A_i) = 0$

③ $\forall (A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ mit $A_{i+1} \subset A_i \; \forall i$ und $A := \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{R}$: $\lim_{i\to\infty} P(A_i) = P(A)$

④ $\forall$ —//— $A_{i+1} \supset A_i \; \forall i$ und $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{R}$: —//—.

Beweis: ① $\Rightarrow$ ④: $\forall k\in\mathbb{N}$: $P(A) = P\Big(A_k \cup \bigcup_{i=k}^{\infty} (A_{i+1}\setminus A_i)\Big) \overset{\text{disjunkt}}{=} P(A_k) + \sum_{i=k}^{\infty} P(A_{i+1}\setminus A_i)$

$\Rightarrow |P(A) - P(A_k)| \le \sum_{i=k}^{\infty} P(A_{i+1}\setminus A_i) \xrightarrow{k\to\infty} 0$, da $\sum_{1}^{\infty} P(A_{i+1}\setminus A_i) \le P(A) < \infty$

④ $\Rightarrow$ ③: Für A_i wie in ③:

$$P\Big(\bigcap_i A_i\Big) = P(A_1) - P\Big(A_1 \setminus \bigcap_i A_i\Big) = P(A_1) - P\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (A_1\setminus A_i)\Big) \overset{④}{=} P(A_1) - \lim_i P(A_1\setminus A_i)$$

$$= P(A_1) - \big(P(A_1) - \lim_i P(A_i)\big) = \lim_i P(A_i)$$

③ $\Rightarrow$ ②: trivial.

② $\Rightarrow$ ①: Sei $(B_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ disjunkt und $B := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \in \mathcal{R}$ $\Rightarrow$

$A_n := B \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_n) = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} B_i \in \mathcal{R}$ und $\bigcap_n A_n = \emptyset$.

$\Rightarrow P(B) - \sum_{1}^{n} P(B_i) \underset{\text{endl. additiv}}{=} P(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{②} 0$ ■

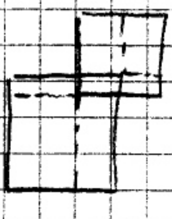
Folgender Satz zeigt, daß es in der Regel zu einem Prämaß auf einem Ring $\mathcal{R}$ genau ein Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ gibt, daß auf $\mathcal{R} \subset \sigma(\mathcal{R})$ mit dem geg. Prämaß übereinstimmt:

5.4. Fortsetzungssatz von Caratheodory: $\tilde{P}$ Prämaß auf Ring $\mathcal{R}$. Dann

① $\exists$ Maß P auf $\sigma(\mathcal{R})$ mit $P|_{\mathcal{R}} = \tilde{P}$

② Ist $\tilde{P}$ σ-endlich, d.h. ist $\Omega = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ mit $A_i \in \mathcal{R}$ und $\tilde{P}(A_i) < \infty$ für $i\in\mathbb{N}$, so ist P aus ① eindeutig.

5.5. Korollar: $\tilde{P}$ Prämaß auf Ring $\mathcal{R}_d$ der halboffenen Quader mit $\tilde{P}(Q) < \infty \; \forall Q \in \mathcal{R}_d$ $\Rightarrow$ $\exists$ genau ein Maß P auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $P|_{\mathcal{R}_d} = \tilde{P}$.



Fazit: Maße auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ sind eindeutig bestimmt durch Angabe von $P(]a_1,b_1] \times \dots \times]a_d,b_d])$ $a_i \le b_i$, $i=1 \dots d$.

Denn: Jeder $Q \in \mathcal{R}_d$ darstellbar als endliche Vereinigung disjunkter solcher Quader $\Rightarrow$ $P(Q)$ eindeutig fixiert!

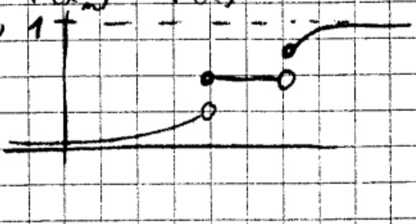
Für $d=1$ können daher W'maße effizient beschrieben werden durch sog. Verteilungsfunktionen:

5.6 Def.: Eine Fkt. $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ heißt Verteilungsfkt., falls

① F monoton wachsend mit $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ und $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

② F rechtsstetig, d.h. $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $x_n \downarrow x$:
$\lim_{n \to \infty} F(x_n) = F(x)$

Bsp.:



5.7 Satz.

① P W'maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \Rightarrow F_P(x) := P(]-\infty, x])$ ist Verteilungsfkt.

② Ist $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ Verteilungsfkt., so existiert genau ein W'maß P auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit $F = F_P$.

Beweisskizze:

① F_P monoton, da $x \leq y \Rightarrow]-\infty, x] \subset]-\infty, y] \Rightarrow F_P(x) \leq F_P(y)$.

F_P rechtsstetig, da: $x_n \downarrow x \Rightarrow]-\infty, x] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}}]-\infty, x_n]$

$$\Rightarrow F_P(x) = P(]-\infty, x]) \underset{5.3(3)}{=} \lim_{n \to \infty} P(]-\infty, x_n]) = \lim_{n \to \infty} F_P(x_n)$$

$\lim_{x \to \pm\infty} F_P(x)$ analog mit Lemma 5.3.

② Sei F_P Verteilungsfkt. und R Ring d. halboffenen Intervalle.
$A \in R$ darstellbar als disjunkte Vereinigung v. Intervallen $A = \bigcup_{i=1}^{n}]a_i, b_i]$.
mit $a_i \leq b_i$. Setze $P(A) := \sum_{i=1}^{n} (F(b_i) - F(a_i))$.

Man zeigt: ⓐ $P: R \to [0,1]$ wohldefinierter Inhalt.

ⓑ P ist Prämaß

Nach Satz 5.4 ist P eindeutig zu Maß P auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ fortsetzbar.
P ist W'maß, da $P(\mathbb{R}) = P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}}]-n, n]) = \lim_{n} (F(n) - F(-n)) = 1 - 0$.
Ferner ist nach Konstruktion $F_P = F$, da
$\forall x \in \mathbb{R}: F_P(x) = P(]-\infty, x]) = \lim_{n \to \infty} P(]-n, x]) = \lim_{n} (F(x) - F(-n)) = F(x)$.

ad (6): Verifiziere Bedingung 5.3(2):

Seien $A_i \in \mathcal{R}$, $A_{i+1} \subset A_i$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Annahme: $P(A_i) > \varepsilon > 0$ $\forall i \in \mathbb{N}$.

Zeige: $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \neq \emptyset$.

Dazu: Wähle $B_i \in \mathcal{R}$ mit $\overline{B_i}$ (Abschluß) $\subset A_i$ und $P(A_i \setminus B_i) < \varepsilon / 2^{i+1}$

(Dies kann durch kleines Vergrößern der unteren Schranke erzielt werden)

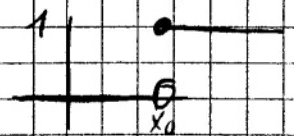
Dann $P(B_1 \cap \dots \cap B_n) \geq P(A_n) - \sum_{i=1}^{n} P(A_n \setminus B_i) \geq \varepsilon - \varepsilon\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n$

$\Rightarrow \overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_n} \neq \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und diese Mengen sind kompakt.

Endl. Durchschnittseigenschaft von Kompakta $\Rightarrow \emptyset \neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_n} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ■

5.8 Beispiele:

(1) Für $x_0 \in \mathbb{R}$ ist $F^{x_0} := \begin{cases} 1 & x \geq x_0 \\ 0 & x < x_0 \end{cases}$



Verteilungsfkt. Das assoziierte W'maß δ_{x_0} heißt Punktmaß in x_0; dabei $\delta_{x_0}(A) := \begin{cases} 1 & x_0 \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $(A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Beachte dabei: δ_{x_0} ist W'maß (Übung!), und $F_{\delta_{x_0}} = F^{x_0}$.

(2) Seien P_1, P_2 W'maße auf $\mathbb{R}$ mit Verteilungsfkt'en F_1, F_2 und sei $\lambda \in [0,1]$

$\Rightarrow P(A) := \lambda P_1(A) + (1-\lambda) P_2(A)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ definiert ein W-maß auf $\mathbb{R}$, kurz: $P = \lambda P_1 + (1-\lambda) P_2$.

und $F_{\lambda P_1 + (1-\lambda) P_2} = \lambda \cdot F_1 + (1-\lambda) F_2$

(Nachweis, daß P W'maß ist: $P(\mathbb{R}) = \lambda P_1(\mathbb{R}) + (1-\lambda) P_2(\mathbb{R}) = 1$.

und $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ disjunkt $\Rightarrow P(\bigcup_i A_i) = \lambda P_1(\bigcup_i A_i) + (1-\lambda) P_2(\bigcup_i A_i)$

$= \lambda \sum_{i\in\mathbb{N}} P_1(A_i) + (1-\lambda) \sum_{i\in\mathbb{N}} P_2(A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P(A_i)$)

(3) Mit (1) + (2) lassen sich die auf endliche Mengen konzentrierten W'maße bilden: Sei $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow P := \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{x_i}$ W'maß mit Verteilungsfkt.

$F = \sum_{i=1}^{n} a_i F^{x_i}$

Bsp.: Binomialverteilung $B_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$.

(4) Prinzip aus (3) auf abzählbar unendliche Konvexkombinationen übertragbar:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1$.
Dann ist $P := \sum_{i=1}^{\infty} a_i \delta_{x_i}$ W'maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit Verteilungsfkt. $F = \sum_{i=1}^{\infty} a_i F^{x_i}$.

Bsp.: Poisson-Verteilung $\pi_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \delta_k$.

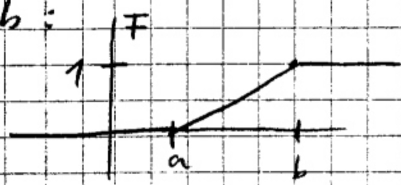
5.9. W'maße auf $\mathbb{R}$ mit Dichten:

Sei $f : \mathbb{R} \to [0,\infty[$ uneigentlich Riemann- od. Regel-integrierbar (oder Lebesgue-int'bar) mit $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
$\Rightarrow$ $F(x) := \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ ist Verteilungsfkt., zu der ein eindeutiges W'maß P existiert.

Man sagt: P ist das W'maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit Dichte f.

5.10. Bsp.: Gleichverteilung auf $[a,b]$, $a<b$:

$$f(t) := \begin{cases} 1/(b-a) & t \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



5.11. Bsp.: Exponentialverteilung. $\lambda > 0$ Index

$$f_\lambda(x) := \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow F_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

Das W'maß dazu heißt Exponentialverteilung von Index λ.
Deutung: Kontinuierliche Analogon zu geometrischen Verteilungen
205 Anwendung auf Wartezeiten etc. vgl. Übungen.

5.12. Normalverteilung: $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ Parameter

Normalverteilung $N(\mu,\sigma^2)$ ist das W'maß auf $\mathbb{R}$ mit Dichte

$$f_{\mu,\sigma^2}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

$N(0,1)$ heißt Standardnormalverteilung.

Beweis von $\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mu,\sigma^2}(x)\,dx = 1$: O.E. $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ (Substitution)

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2}\,d\lambda^2(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2/2} \cdot r\,dr\,d\varphi = 2\pi$$

$\boxed{dx\,dy = r\,dr\,d\varphi}$ Polarkoordinaten: $\binom{x}{y} = \binom{r\cos\varphi}{r\sin\varphi}$ ∎

5.13 Das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^d$:

Für halboffene Quader im $\mathbb{R}^d$ setze

(*) $\lambda^d(]a_1,b_1]\times \dots \times]a_d,b_d]) := \prod_{i=1}^{d}(b_i-a_i) \quad (a_i \le b_i,\ i=1,\dots,d)$

Jedes Element $A \in R_d$ ist endl. disjunkte Vereinigung solcher Quader.

Daher ist Inhalt $\lambda^d : R_d \to [0,\infty[$ durch (*) eindeutig bestimmt.

Wie im Beweis von Satz 5.7 zeigt man: λ^d ist σ-endliches Prämaß.

Satz von Caratheodory $\Rightarrow$ λ^d eindeutig zu Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ fortsetzbar.

λ^d auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ heißt Lebesgue-Maß.

Nun Exkurs in Integration

5.14 Integration v. Treppenfkt'en:

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ Maßraum.

Zu $A \in \mathcal{A}$ betrachte Indikatorfkt. $1\!\!1_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$1\!\!1_A$ ist meßbar, und man setzt $\int_\Omega 1\!\!1_A \, dP = P(A) \in [0,\infty]$

Integral linear $\Rightarrow$

Für die nicht-negative Treppenfkt. $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1\!\!1_{A_i}$ $\quad (n \in \mathbb{N}, a_1,\dots,a_n \ge 0,\ A_1,\dots,A_n \in \mathcal{A})$

Setze $\int_\Omega f \, dP := \sum_{i=1}^{n} a_i P(A_i) \in [0,\infty]$

Dabei Konvention: $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ und $\infty + x = \infty \quad \forall x \in [0,\infty]$

Sei $E^+(\Omega, \mathcal{A})$ Menge aller nicht neg. Treppenfkt'en. Dann:

5.15 Satz

(1) Für $f \in E^+(\Omega,\mathcal{A})$ ist $\int_\Omega f \, dP \in [0,\infty]$ wohldefiniert.

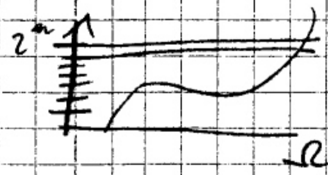
(2) Monotonie: $\forall f,g \in E^+(\Omega,\mathcal{A})$, $f \le g$ auf $\Omega \Rightarrow \int_\Omega f \, dP \le \int_\Omega g \, dP$

(3) Linearität: $\forall$ —"— , $a,b \ge 0$: $\int_\Omega (af+bg) \, dP = a\int_\Omega f \, dP + b \int_\Omega g \, dP$

(4) Satz vom monotonen Limes: Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E^+(\Omega,\mathcal{A})$ monoton wachsend (in n) mit $\sup_n f_n(x) = \sup_n g_n(x) \quad \forall x \in \Omega$.
Dann $\sup_n \int_\Omega f_n \, dP = \sup_n \int_\Omega g_n \, dP$.

Beweis: Analog Ana. II.

5.16 Satz. $f:\Omega\to[0,\infty]$ $(\mathcal{A},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-messbar $\Rightarrow$
$\exists\, (f_n)_{n\geq 1}\subset E^+(\Omega,\mathcal{A})$ mit $f_n\uparrow f$ auf Ω.



Beweis: $$f_n := \sum_{k=0}^{2^{2n}} \frac{k}{2^n}\, \mathbb{1}_{\{\frac{k-1}{2^n} < f \leq k/2^n\}}$$

(im Wesentl. abrunden auf $k/2^n$!). ∎

5.17 Konstruktion allg. Integrale nach Lebesgue:

① Sei $f:\Omega\to[0,\infty]$ messbar $\overset{5.16}{\Rightarrow}$ $\exists\,(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset E^+(\Omega,\mathcal{A})$ mit $f_n\uparrow f$

Setze $\boxed{\int_\Omega f\,dP := \sup_n \int f_n\,dP \in[0,\infty]}$ (*)

(*) ist wohldef. wg. Satz 15.15(4)

f heißt <u>integrierbar bzgl. P</u> $:\Leftrightarrow$ f messbar und $\int_\Omega f\,dP<\infty$.

② Sei $f:\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ messbar.

<u>Def.</u>: f heißt integrierbar bzgl. P $:\Leftrightarrow$ $|f|$ integrierbar bzgl. P im Sinne von ①

$\Leftrightarrow$ $f_+ := \max(f,0)$, $f_- := -\min(f,0)$ —— " ——

Beachte dabei: • $f=f_+-f_-$, $|f|=f_++f_-$

• f messbar $\Rightarrow$ $f_+, f_-, |f|$ messbar.

<u>Falls</u> f integrierbar ist, setze $\int_\Omega f\,dP := \int_\Omega f_+\,dP - \int_\Omega f_-\,dP \in \underline{\mathbb{R}}$

<u>Beachte</u>: Das mögl. Problem „$\infty-\infty$" tritt nicht auf!

③ $f:\Omega\to\mathbb{C}$ int.bar bzgl. P $:\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re} f$, $\mathrm{Im} f$ int'bar bzgl. P.

Setze $\int f\,dP := \int(\mathrm{Re} f)\,dP + i\cdot\int(\mathrm{Im} f)\,dP$

④ <u>Def.</u>: $\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{A},P) := \{f:\Omega\to\overline{\mathbb{R}} : f \text{ messbar } \underline{\text{und}} \text{ integrierbar bzgl. } P\}$.

Für $f\in\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{A},P)$ setze $\|f\|_{1,P} := \int_\Omega |f|\,dP \in[0,\infty[$

5.18 Regeln:

① Das Integral auf $\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{A},P)$ ist linear und monoton (vgl. 5.15 ②,③)

② <u>Δ-Ungleichung</u>: $\forall f,g\in\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{A},P)$: $\|f+g\|_1 \le \|f\|_1+\|g\|_1$

<u>da</u> $\int|f+g|\,dP \le \int(|f|+|g|)\,dP$.

③ $c\in\mathbb{R}$, $f\in\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{A},P) \Rightarrow \|c\cdot f\|_1 = |c|\cdot\|f\|_1$.

Folgende Sätze zeigen, daß in gewissen Situationen Limes und Integrale vertauscht werden dürfen (vgl. Ana. 1/2):

5.19. Satz $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ Maßraum, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega$.

① Falls $f_n \uparrow f$ auf Ω, so gilt $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, dP = \int f \, dP$
(„Satz von der monotonen Konvergenz")

② Falls $g \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ existiert mit $|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \in \Omega$,
so gilt $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, dP = \int f \, dP$
(„Satz von der majorisierten Konvergenz" oder „Satz von Lebesgue")

5.20. Bsp.: Diskrete Maße:

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ Meßraum, $I = \mathbb{N}_0$ oder $\{1, \dots, n\}$; für $i \in I$ wähle $x_i \in \Omega$ und $p_i \in [0,1]$ mit $\sum_{i\in I} p_i = 1$.
Dann ist $P := \sum_{i \in I} p_i \delta_{x_i}$ W'maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$
Dabei $P(A) = \sum_{i\in I: x_i \in A} p_i$ für $A \in \mathcal{A}$. Dann:

① $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P) \Leftrightarrow f: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ meßbar und $\sum_{i\in I} p_i |f(x_i)| < \infty$

② $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P) \Rightarrow \int f \, dP = \sum_{i\in I} p_i f(x_i)$

Beweis: ⓐ $f = \mathbb{1}_A \Rightarrow \int \mathbb{1}_A \, dP = P(A) = \sum_i \mathbb{1}_A(x_i) p_i \in [0,\infty] \Rightarrow$ ①, ②

ⓑ $f \in E^+(\Omega, \mathcal{A}) \leadsto$ ① + ② gelten auch (Linearkombination!)

ⓒ Übergang zu Limiten gemäß 5.16/5.17 zeigt ① + ② richtig für $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $f \geq 0$.

ⓓ Linearkombination $\leadsto$ allg. Fall ■

5.21. Bsp.: Integration bzgl. dem Lebesgue-Maß λ auf $\mathbb{R}$:

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf jedem kp. Intervall Regel- od. Riemann-int'bar, so daß für das uneigentl. Integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx < \infty$ gilt. Dann:

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx}_{\text{Regel- od. Riemann}} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f \, d\lambda}_{\text{Lebesgue-Int.}}$$

Beweis ähnlich wie in 5.20 durch „Hochhangeln" (a) – (d); vgl. Analysis II.

5.22. Bsp.: Integration bzgl. W'maßen P auf $\mathbb{R}$ mit Dichten f:

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $f \geq 0$ mit $\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = 1$ Dichte von P.

Dann gilt $P(]a,b]) = \int_a^b f \, d\lambda$ $(a \leq b)$.

Integration bzgl. P:

① $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P) = \{ g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ mbar : $\int |g| \cdot f \, d\lambda < \infty \}$

② $g \in$ — " — $\Rightarrow \int f \, dP = \int f \cdot g \, d\lambda$.

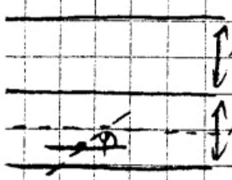
Kurzschreibweise: $\boxed{dP = f \, d\lambda = f(x) \, dx}$

Beweis auch analog zu 5.20/5.21.

Bemerkung: Die Aussagen aus § 5.22 gelten auch wortwörtlich auf $\mathbb{R}^d$.

5.23 Bsp.: Nadelexperiment von Buffon:

Auf Boden Linien mit Abstand 1 parallel gezeichnet.



Werfe „zufällig" Nadel d. Länge $r > 0$ auf Boden.

Dabei „Winkel" und „Mittelpunkt" der Nadel „gleichverteilt".

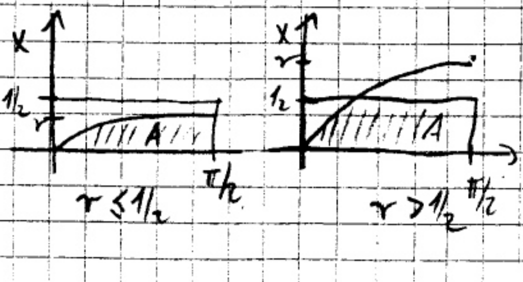
A = Ereignis, daß Nadel mind. eine Linie trifft. Frage: $P(A) = ?$

Modell:

$\Omega = [0, 1/2] \times [0, \pi/2] \subset \mathbb{R}^2$; Erste Koordinate = Abstand Nadelmitte zur nächsten Linie, zweite = Winkel.

P Gleichverteilung auf Ω, d.h. $dP(x) = \frac{4}{\pi} 1_\Omega \, d\lambda^2(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$.

$A = \{ (x,y) \in \Omega : 0 \leq x \leq r \sin y \}$



Also für $r \leq 1/2$:

$P(A) = 4/\pi \cdot r \cdot 1 = \frac{4r}{\pi}$.