§7 Gemeinsame Verteilungen von Zufallsvariablen und Summen unabhängiger Zufallsvariablen

7.1. Def.:

(1) $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W'raum; $n \in \mathbb{N}$, $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ Meßräume, $X_i : \Omega \to \Omega_i$ ZV'e mit Verteilungen P_{X_i} auf $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ $(i = 1, \dots, n)$.

$\overset{§3}{\Rightarrow}$ $X := (X_1, \dots, X_n) : \Omega \to \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n)$-meßbare ZV'e mit Verteilung $P_X = P_{(X_1, \dots, X_n)}$.

Diese Verteilung heißt gemeinsame Verteilung von $(X_1, \dots, X_n)$.

(2) Sei $\tilde{P}$ W'maß auf $(\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n, \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n)$.

Für $i = 1, \dots, n$ betrachte Koordinatenprojektion $p_i : \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n \to \Omega_i$.

Dann heißt das W'maß $P_i := p_i(\tilde{P})$ i-te Randverteilung von $\tilde{P}$.

Bsp.: $n = 2$, $\Omega_1 = \Omega_2 = \{1, 2\}$.

	1	2	
1	1/8	3/8	1/4
2	3/8	1/8	1/4
	1/4	1/4	

	1	2	
1	3/8	1/8	1/4
2	1/8	3/8	1/4
	1/4	1/4	

Tabelleneinträge = gemeinsame Verteilung.

Ränder: Randverteilungen.

Beachte: Randverteilungen bestimmen i.a. gemeinsame Verteilung nicht notwendig!

7.2. Beziehung Gemeinsame Verteilung $\Leftrightarrow$ Randverteilung:

In Situation 7.1(1) gilt: $\forall\, i = 1, \dots, n$: $P_{X_i} = p_i(P_{(X_1, \dots, X_n)})$.

Also: Verteilung von X_i ist i-te Randverteilung der gemeinsamen Verteilung.

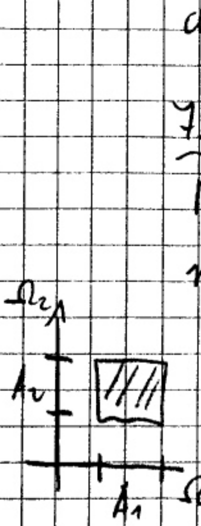
denn:

$$\begin{tikzcd}
(\Omega, \mathcal{A}, P) \arrow[r, "(X_1, \dots, X_n) = X"] \arrow[dr, "X_i"'] & (\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n, \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n, P_X) \arrow[d, "p_i"] \\
& (\Omega_i, \mathcal{A}_i, P_{X_i})
\end{tikzcd}$$

Für $A \in \mathcal{A}_i$ gilt: $p_i(P_X)(A) = P_X(p_i^{-1}(A)) = X^{-1}(p_i^{-1}(A)) = X_i^{-1}(A) = P_{X_i}(A)$. ∎

Es gibt einen wichtigen Fall, wo die gemeinsame Verteilung rekonstruierbar ist aus den Randverteilungen. Im Spezialfall: diskrete Produktw'räume definieren wir allg. Produkt-W'räume.

7.3 Produkt-W'räume: Seien $n\in\mathbb{N}$, $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, P_i)$ W'räume für $i=1,\dots,n$. Dann existiert genau ein W'maß P auf $(\Omega,\mathcal{A}) := (\Omega_1\times\dots\times\Omega_n, \mathcal{A}_1\otimes\dots\otimes\mathcal{A}_n)$ mit (*) $\forall A_i\in\mathcal{A}_i$: $P(A_1\times\dots\times A_n) = P_1(A_1)\cdot P_2(A_2)\cdots P_n(A_n)$.



Dieses P heißt Produkt der $P_1,\dots,P_n$ und $(\Omega,\mathcal{A},P)$ das Produkt der W'räume $(\Omega_i,\mathcal{A}_i,P_i)$ $(i=1,\dots,n)$; Notation: $P = P_1\times\dots\times P_n$

Beweisskizze: (*) und endliche Additivität legt P fest auf

$\mathcal{R} := \{\bigcup_{k=1}^{r} (A_{k,1}\times\dots\times A_{k,n}) : A_{k,i}\in\mathcal{A}_i,\ k=1,\dots,r,\ i=1,\dots,n$, wobei diese Mengen disjunkt sind $\}$.

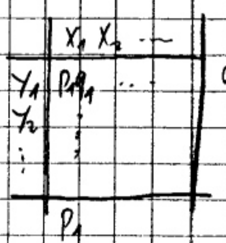
Man überprüft: $\mathcal{R}$ ist Ring mit $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{A}_1\otimes\dots\otimes\mathcal{A}_n$ nach Def. und P def. Prämaß auf $\mathcal{R}$. Satz von Carathéodory: P eindeutig bestimmt ■

7.4 Beispiele: $n = 2$

(1) diskreter Fall (vgl §2): $P_1 = \sum_{i\ge1} p_i\delta_{x_i}$ $(p_i\ge0,\ \sum_{i\ge1}p_i=1,\ x_i\in\Omega_1)$

$P_2 = \sum_{j\ge1} q_j\delta_{y_j}$ $(q_j\ge0,\ \sum_{j\ge1} q_j = 1,\ y_j\in\Omega_2)$

$\Rightarrow P_1\times P_2 = \sum_{i,j\ge1} p_iq_j\,\delta_{(x_i,y_j)}$



(2) Kontinuierlich: $\Omega_1=\Omega_2=\mathbb{R}$, P_i W'maß auf $\mathbb{R}$ mit Dichte f_i

$\Rightarrow P_1\times P_2$ W'maß auf $\mathbb{R}^2$ mit Dichte $f(x,y) := f_1(x)\cdot f_2(y)$.

Denn: f ist Dichte eines W'maßes, und dieses genügt (*) aus § 7.3!

Produktw'maße eng mit Unabhängigkeit verwandt:

7.5 Satz: Seien $n\in\mathbb{N}$, $(\Omega_i,\mathcal{A}_i,P_i)$ W'räume $(i=1,\dots,n)$

$\Rightarrow (\Omega_1\times\dots\times\Omega_n, \mathcal{A}_1\otimes\dots\otimes\mathcal{A}_n, P_1\times\dots\times P_n) =: (\Omega,\mathcal{A},P)$ W'raum, in dem die Unter-σ-Algebren $\tilde{\mathcal{A}}_i = \{\Omega_1\times\dots\times\Omega_{i-1}\times A_i\times\Omega_{i+1}\times\dots\times\Omega_n : A_i\in\mathcal{A}_i\}$ $(i=1,\dots,n)$ unabhängig sind.

Denn: $\forall A_1 \in \mathcal{A}_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_n: P\left(\underbrace{(A_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n)}_{} \cap \ldots \cap \underbrace{(\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{n-1} \times A_n)}_{}\right)$
$= P(A_1 \times \ldots \times A_n) \underset{\circledast}{=} P_1(A_1) \cdot \ldots \cdot P_n(A_n) = P(\ldots) \cdot \ldots \cdot P(\ldots)$ ∎

7.6. Satz. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W'raum, $n \in \mathbb{N}$, $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ Meßräume, $X_i: \Omega \to \Omega_i$ ZV'e für $i = 1, \ldots, n$. Dann:
$X_1, \ldots, X_n$ unabhängig $\Leftrightarrow P_{(X_1, \ldots, X_n)} = P_{X_1} \times \ldots \times P_{X_n}$.

Beweis: „$\Rightarrow$": Für $A_i \in \mathcal{A}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ und $A := A_1 \times \ldots \times A_n$ gilt:
$P_{(X_1, \ldots, X_n)}(A) = P(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) \underset{\text{Annahme}}{=} P(X_1 \in A_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n \in A_n) = P_{X_1}(A_1) \cdot \ldots \cdot P_{X_n}(A_n)$.
Also mit $\circledast$ aus 7.3: $P_{(X_1, \ldots, X_n)} = P_{X_1} \times \ldots \times P_{X_n}$.
„$\Leftarrow$": Sei $A_i \in \mathcal{A}_i$ $(i = 1, \ldots, n) \Rightarrow P(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = P((X_1, \ldots, X_n) \in A_1 \times \ldots \times A_n)$
$= P_{(X_1, \ldots, X_n)}(A_1 \times \ldots \times A_n) \underset{\text{Annahme}}{=} P_{X_1}(A_1) \cdot \ldots \cdot P_{X_n}(A_n) = P(X_1 \in A_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n \in A_n)$
$\Rightarrow X_1, \ldots, X_n$ unabhängig ∎

Folgender Satz zeigt, wie man für $n=2$ bzgl. Produktmaßen integriert.

7.7. Satz von Fubini: $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, P_i)$ σ-endliche Meßräume $(i = 1, 2)$.

① Sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, P_1 \times P_2) \Rightarrow$
$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, d(P_1 \times P_2) = \int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) \, dP_1(\omega_1) \, dP_2(\omega_2) \quad \circledast$$
Dabei existiert $\int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) \, dP_1(\omega_1)$ für P_2-fast alle ω_2

② Rollen von Ω_1, Ω_2 in $\circledast$ vertauschbar.

③ Ist $f \geq 0$, und ergibt rechte Seite von $\circledast$ einen Wert $< \infty$, so gilt $f \in \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, P_1 \times P_2)$.

Beweis: Analog zu Ana. II, Lebesgueintegral.

Anwendung auf Produktregel für Erwartungswerte aus §6:

7.8. Satz. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W'raum, $X_1, X_2 \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ unabhängige ZV'e
$\Rightarrow X_1 \cdot X_2 \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $E(X_1 \cdot X_2) = E(X_1) \cdot E(X_2)$.

Beweis: $\infty > E(|X_1|)\cdot E(|X_2|) = \int_{\mathbb{R}}|x_1|\,dP_{X_1}(x_1)\cdot\int_{\mathbb{R}}|x_2|\,dP_{X_2}(x_2) \underset{\text{Fubini}}{=}$

$= \int_{\mathbb{R}^2}|x_1x_2|\,d(P_{X_1}\times P_{X_2})(x_1,x_2) = \int_{\mathbb{R}^2}|x_1x_2|\,dP_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) \underset{\text{Trafosatz 6.1}}{=}$ $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto x\cdot y$

$= \int_{\mathbb{R}}|z|\,d\underbrace{h(P_{(X_1,X_2)})}_{=P_{X_1\cdot X_2}}(z) = E(|X_1X_2|) \Rightarrow X_1X_2\in L^1$

Rechnung ohne Beträge $\Rightarrow$ Produktregel ■

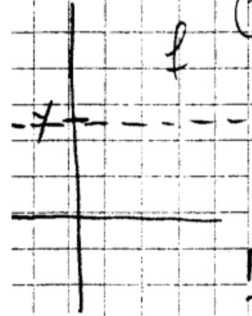
7.9. Bestimmung von Randverteilungen und bedingten Erwartungen im Kontinuierlichen

Seien $X_1,X_2:(\Omega,\mathcal{A},P)\to\mathbb{R}$ ZVe mit gemeinsamer Verteilung $P_{(X_1,X_2)}$ mit Dichte $f:\mathbb{R}^2\to[0,\infty[$, d.h. $dP_{(X_1,X_2)} = f\,d\lambda^2$. Dann:

① P_{X_1} ist W'maß auf $\mathbb{R}$ mit Dichte $f_1(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy$ $(x\in\mathbb{R})$

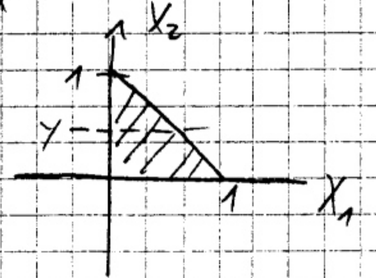
denn: $P_{X_1}(]a,b]) = P(X_1\in]a,b],X_2\in\mathbb{R}) = \int_a^b\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx$ ■

② $E(X_1) = \int_{\mathbb{R}} x\cdot f_1(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^2} x\,f(x,y)\,dy\,dx$ (im Fall d. Existenz).



③ Sei $y\in\mathbb{R}$ mit $\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx > 0$.

Dann heißt $E(X_1|X_2=y) := \dfrac{\int_{\mathbb{R}} x\,f(x,y)\,dx}{\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx}$ bedingte Erwartung von X_1 unter der Bdgg „$X_2=y$".



Bsp.: $P_{(X_1,X_2)}$ Gleichverteilung auf Dreieck Δ

$\Rightarrow \quad f(x,y) = 2\cdot\mathbb{1}_\Delta(x,y)$.

$\Rightarrow \quad f_1(x) = 2(1-x)\cdot\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$

$E(X_1) = \int_0^1 2x(1-x)\,dx = \ldots = 1/3$.

$\forall y\in[0,1[: \quad E(X_1|X_2=y) = \dfrac{\int_0^{1-y}2x\,dx}{\int_0^{1-y}2\,dx} = \ldots = \dfrac{1-y}{2}$.

7.10. Kovarianzmatrizen:

① Wdh. Eine symmetrische Matrix $A\in\mathbb{R}^{d\times d}$ heißt:

(a) positiv definit $:\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}: x^TAx>0 \Leftrightarrow$ Alle EWe von A positiv

(b) positiv semidefinit $:\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^d: x^TAx\geq 0 \Leftrightarrow$ Alle EWe von A nichtnegativ.

② Fakt: $X_1,\ldots,X_d:\Omega\to\mathbb{R}$ ZVe mit $E(X_i^2)<\infty$ $\forall i=1,\ldots,d$

⇒ Die sog. Kovarianzmatrix $(\mathrm{Kov}(X_i,X_j))_{i,j=1,\dots,d}$ ist positiv semidefinit

<u>Denn:</u> $a_1,\dots,a_d\in\mathbb{R} \Rightarrow (a_1 \dots a_d)\left(\mathrm{Kov}(X_i,X_j)\right)_{i,j=1,\dots,d}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_d\end{pmatrix} =$

$= \sum_{i,j} a_i a_j \, E\left((X_i-E(X_i))(X_j-E(X_j))\right) = E\left(\left(\sum a_i (X_i - E(X_i))\right)^2\right) \geq 0$ ∎

7.11. Mehrdimensionale Normalverteilungen:

① Die d-dim. Standardnormalverteilung ist das W'maß auf $\mathbb{R}^d$ mit Lebesgue-Dichte $f(x) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-\|x\|_2^2/2}$

Dieses W'maß ist d-faches direktes Produkt eindim. Standardnormalverteilungen

② Für $d\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{R}^d$, $\Sigma\in\mathbb{R}^{d,d}$ symmetrisch, positiv definit ist die d-dim. Normalverteilung $N(m,\Sigma)$ das W'maß auf $\mathbb{R}^d$ mit Lebesgue-Dichte $f_{m,\Sigma}(x) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{1}{\sqrt{\det \Sigma}} e^{-(x-m)^T \Sigma (x-m)/2}$

Übung!

Für ein $N(m,\Sigma)$-verteilten sog. „Zufallsvektor" $(X_1,\dots,X_d):\Omega\to\mathbb{R}^d$ ist $E(X_i)=m_i$ $(i=1,\dots,n)$, und Σ ist seine Kovarianzmatrix.

Warum ist $f_{m,\Sigma}$ tatsächlich Dichte eines W'maßes; dazu:

<u>7.12 Lemma</u> $X:\Omega\to\mathbb{R}^d$ Zufallsvektor mit Verteilung mit Dichte f, $T:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ Diffeomorphismus (d.h. T bijektiv, T, T^{-1} stetig partiell diff'bar) ⇒ $T(X):\Omega\to\mathbb{R}^d$ Zufallsvektor mit Verteilung mit Dichte $g(x) := \frac{1}{|\det dT(x)|} f(T^{-1}(x))$

<u>Beweis:</u> Für Borel-Menge $A\subset\mathbb{R}^d$ gilt: Trafosatz $y := Tx$

$P(T(X)\in A) = P(X\in T^{-1}(A)) = \int_{T^{-1}(A)} f(x)\,dx = \int_A \frac{1}{|\det dT(y)|} f(T^{-1}(y))\,dy$ ⇒ Beh. ∎

<u>Anwendung auf Normalverteilung:</u>

X d-dim. Standard-Normalverteilt, $T(x) := Ax+b$, $A\in\mathbb{R}^{d\times d}$ invertierbar, $b\in\mathbb{R}^d$

⇒ $T(X)$ $N(b, A^TA)$-verteilt.

<u>Denn:</u> Nach 7.12 hat $T(X)$ die Dichte $g(x) = \frac{1}{\det A \cdot (2\pi)^{d/2}} e^{-(x-b)A^TA(x-b)/2}$.

Da jede $\Sigma\in\mathbb{R}^{d\times d}$ symm., positiv definit als $\Sigma = A^TA$ darstellbar ist, sind obige $f_{m,\Sigma}$ Dichten von W'maßen!

Frage: $X, Y: \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige ZV'e mit geg. Verteilungen P_X, P_Y
Wie berechnet man P_{X+Y}?
Zum Verständnis erst $\mathbb{N}_0$-wertige ZV'e:

7.13. Verteilungen von Summen unabhängiger $\mathbb{N}_0$-wertiger Zufallsvariablen

$X_1, X_2 : \Omega \to \mathbb{N}_0$ unabhängige ZV'e mit Verteilungen P_{X_i} und Zähldichten f_{X_i} $(i=1,2)$.

① $X_1 + X_2$ $\mathbb{N}_0$-wertig mit Zähldichte

$$f_{X_1+X_2}(n) = P(X_1+X_2=n) = P(\exists k \in \{0,\dots,n\} : X_1 = k, X_2 = n-k)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} P(X_1=k) P(X_2 = n-k) \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

② Erzeugende Fkt. von X_1+X_2 ist

$$g_{X_1+X_2}(t) = \sum_{0}^{\infty} f_{X_1+X_2}(k) \cdot t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} f_{X_1}(l) f_{X_2}(k-l) t^l t^{k-l} = g_{X_1}(t) \cdot g_{X_2}(t).$$

③ Bsp: X_i π_{λ_i}-Poisson-verteilt $(\lambda_1, \lambda_2 \geq 0) \Rightarrow X_1 + X_2$ $\pi_{\lambda_1+\lambda_2}$-verteilt

denn: $$f_{X_1+X_2}(n) = \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-\lambda_1-\lambda_2} \frac{\lambda_2^n}{n!} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^k \binom{n}{k}}_{(1+\lambda_1/\lambda_2)^n}$$
$$= \pi_{\lambda_1+\lambda_2}(n)$$ ∎

Nachtrag: Quantitative Poisson-Approximation d. Binomialverteilung:

7.14 Satz. $\forall n \in \mathbb{N}, p \in]0,1[$: $\sum_{k=0}^{\infty} |B_{n,p}(\{k\}) - \pi_{np}(\{k\})| \leq 2np^2$.

Beweis: Betrachte W'raum $(\tilde\Omega, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde P)$ mit $\tilde\Omega = \{-1\} \cup \mathbb{N}_0$, $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{P}(\tilde\Omega)$ und

$$\tilde P(\{k\}) := \begin{cases} e^{-p} p^k / k! & k \geq 1 \\ 1-p & k=0 \\ e^{-p} - (1-p) & k=-1 \end{cases}. \quad \text{Sei } (\Omega, \mathcal{A}, P) := (\tilde\Omega^n, \tilde{\mathcal{A}} \otimes \dots \otimes \tilde{\mathcal{A}}, \tilde P \times \dots \times \tilde P).$$

Die ZVen $X_i : \Omega \to \{0,1\}$, $X_i((k_1,\dots,k_n)) := \begin{cases} 0 & k_i = 0 \\ 1 & k_i \neq 0 \end{cases}$

sind unabhängig, $B_{1,p}$-verteilt $\Rightarrow X := X_1 + \dots + X_n$ $B_{n,p}$-verteilt.

Die ZV'en $Y_i : \Omega \to \mathbb{N}_0$, $Y_i((k_1,\dots,k_n)) := \begin{cases} 0 & k_i \leq 0 \\ k_i & \text{sonst} \end{cases}$ sind unabhängig und

π_p-verteilt $\Rightarrow Y := Y_1 + \dots + Y_n$ π_{np}-verteilt.

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |B_{n,p}(\{k\}) - \pi_{np}(\{k\})| = \sum_{0}^{\infty} |P(X=k) - P(Y=k)|$$
$$= \sum_{0}^{\infty} |\cancel{P(X=Y=k)} + P(X=k, Y\neq k) - \cancel{P(X=Y=k)} - P(Y=k, X \neq k)|$$
$$\leq \sum_{0}^{\infty} (P(X=k, Y\neq k) + P(Y=k, X\neq k)) = 2 \cdot P(X \neq Y) = 2 \cdot P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \neq \sum_{k=1}^{n} Y_k\right)$$
$$\leq 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} P(X_k \neq Y_k) \overset{(*)}{\leq} 2np^2$$

ad ②: $P(X_i \neq Y_i) = 1 - \tilde{P}(\{0,1\}) = 1-(1-p) - pe^{-p} = p(1-e^{-p}) \leq p^2$ ∎

Zurück zur Frage: X, Y unabhängig $\leadsto$ Zshg. P_{X+Y} und P_X, P_Y. Dazu:

7.15. Faltung von W'maßen auf $\mathbb{R}^d$:

Sei $A: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $(x,y) \mapsto x+y$ Addition;

$M^1(\mathbb{R}^d) := \{ W'maße auf (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))\}$;

Für $\mu, \nu \in M^1(\mathbb{R}^d)$ heißt $\mu * \nu := \underbrace{A(\mu \times \nu)}_{\text{Bildmaß unter } A \text{ von } \mu\times\nu \in M^1(\mathbb{R}^{2d})} \in M^1(\mathbb{R}^d)$ Faltung von μ, ν

Dabei: $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \mu * \nu(B) = A(\mu \times \nu)(B) = (\mu \times \nu)(\{(x,y): x+y \in B\})$.

7.16: Lemma. $\mu, \nu, \rho \in M^1(\mathbb{R}^d)$.

① $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu * \nu) \Rightarrow \int f \, d(\mu * \nu) = \iint_{\mathbb{R}^d \, \mathbb{R}^d} f(x+y) \, d\mu(x) \, d\nu(y)$.

② $*$ kommutativ, assoziativ und distributiv, d.h.:

$\mu * \nu = \nu * \mu$, $(\mu * \nu) * \rho = \mu * (\nu * \rho)$, $\lambda \in [0,1] \Rightarrow (\lambda\mu + (1-\lambda)\nu) * \rho = \lambda \mu * \rho + (1-\lambda)\nu * \rho$

③ $X, Y: \Omega \to \mathbb{R}^d$ unabhängig $\Rightarrow P_{X+Y} = P_X * P_Y$.

Beweis: ① $\underbrace{\int f \, d(\mu * \nu)}_{A(\mu\times\nu)} \overset{\text{Trafosatz 6.1}}{=} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(x+y) \, d(\mu \times \nu)(x,y) \underset{\text{Fubini}}{=} \iint f(x+y) \, d\mu(x) \, d\nu(y)$

② $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow (\mu * \nu)(B) = \int 1_B \, d\mu * \nu \overset{①}{=} \iint 1_B(x+y) \, d\mu(x) \, d\nu(y) = \ldots = (\nu * \mu)(B)$

assoziativ: $(\mu * \nu) * \rho(B) = \int 1_B(x+y) d\mu(x) d\nu(y) \overset{①}{=} \iint 1_B(x+y) \, d(\mu * \nu)(x) \, d\rho(y)$

$\overset{①}{=} \iiint 1_B(x+y+z) \, d\mu(x) \, d\nu(y) \, d\rho(z)$ unabhängig von Reihenfolge.

distributiv: ähnlich.

③ X, Y unabhängig $\Rightarrow P_{(X,Y)} = P_X \times P_Y \Rightarrow P_{X+Y} \underset{\text{Trafosatz 6.1}}{=} A(P_{(X,Y)}) = A(P_X \times P_Y) = P_X * P_Y$ ∎

Bsp: ① $x \in \mathbb{R}^d$ fest, $\mu \in M^1(\mathbb{R}^d)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow$

$(\mu * \delta_x)(B) = \int 1_B \, d(\mu * \delta_x) = \int 1_B(y+x) \, d\mu(y) = \int 1_{B-x}(y) \, d\mu(y)$

$= \mu(B-x)$, $B - x = \{z - x : z \in B\}$.

② $\delta_x * \delta_y = \delta_{x+y}$.

③ μ, ν $\mathbb{N}_0$-wertig mit Zähldichten f_1, f_2 $\Rightarrow$

$\mu * \nu$ hat Zähldichte $f_1 * f_2(n) = \sum_k f_1(k) f_2(n-k)$, vgl. §7.13

Ähnliche Formel gilt für W'maße mit Dichten, denn:

7.17. Lemma $\mu \in M^1(\mathbb{R}^d)$, $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \lambda^d)$ Dichte eines W'maßes ν auf $\mathbb{R}^d$ $\Rightarrow$
$(f * \mu)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\, d\mu(y)$ $(x \in \mathbb{R}^d)$ Dichte des W'maßes $\mu * \nu$.

Beweis: $f * \mu \geq 0$, und für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$: $z = x+y$ Fubini

$$(\mu * \nu)(B) \underset{7.16}{=} \iint 1_B(x+y) f(x)\, dx\, d\mu(y) = \iint 1_B(z) f(z-y)\, dz\, d\mu(y) \overset{\text{Fubini}}{=} \iint (f*\mu)(x) 1_B(x)\, dx$$
$$= \int_B (f*\mu)(x)\, dx. \Rightarrow \text{Beh.} \ \blacksquare$$

7.18. Faltung von L^1-Dichten:
$f, g \in L^1(\mathbb{R}^d, \lambda^d)$ Dichten von W'maßen μ, ν $\Rightarrow$ $f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y)\, dy$
Dichte von $\mu * \nu$ (klar mit 7.17, $d\mu(y) = g(y)\,dy$).
Also: X, Y unabhängige ZV'e mit Verteilungen mit Dichten f, g $\Rightarrow$
$X + Y$ ZV'e mit Dichte $f * g$.

7.19. Bsp.: Faltung von Normalverteilungen, $d=1$:

!! ① $x \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0 \Rightarrow \delta_x * N(0, \sigma^2) = N(x, \sigma^2)$ (Übung)

② $N(0, \sigma_1^2) * N(0, \sigma_2^2) = N(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Denn: $N(0, \sigma_i^2)$ hat Dichte $f_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-x^2/2\sigma_i^2}$ $(i = 1, 2)$.

$$f_1 * f_2(x) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\sigma_1^2 \sigma_2^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/2\sigma_1^2} e^{-y^2/2\sigma_2^2}\, dy$$
$$= -\|- \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}\left(\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2}\right) + xy/\sigma_1^2 - x^2/2\sigma_1^2}\, dy$$

Subst.
$$= -\|- \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\left[y\sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2}} - \frac{x}{\sigma_1^2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right]^2 \Big/ 2\right) dy \cdot e^{-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}$$
$$= \text{Konstante} \cdot e^{-x^2/2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} \Rightarrow \text{Beh.} \ \blacksquare$$

③ $N(\mu_1, \sigma_1^2) * N(\mu_2, \sigma_2^2) = \delta_{\mu_1} * N(0, \sigma_1^2) * \delta_{\mu_2} * N(0, \sigma_2^2) = N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Bsp.: Gleichverteilung Übungen!

7.20. Gamma- und χ^2-Verteilungen:

① Def.: Für $\alpha, \nu > 0$ ist die Gammaverteilung mit Index α, ν das W'maß auf $\mathbb{R}$ mit Dichte
$$f_{\alpha,\nu}(x) := \begin{cases} \frac{\alpha^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} e^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

($f_{\alpha,\nu}$ ist Dichte eines W'maßes $\rightsquigarrow$ Übungen!)

(2) Die χ^2-Verteilung χ_k^2 mit $k \geq 1$ Freiheitsgraden ist die Gamma-Verteilung mit $\alpha = 1/2$, $\nu = k/2$.

7.21. Lemma:

(1) $f_{\alpha,\nu} * f_{\alpha,\mu} = f_{\alpha,\nu+\mu}$

(2) $X_1,\dots,X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängig, $N(0,1)$-verteilt $\Rightarrow X_1^2+\dots+X_n^2$ χ_n^2-verteilt.

(3) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)} = \int_0^1 (1-x)^{s-1} x^{t-1} dx \quad (s,t>0)$.

Beweis: (1) $f_{\alpha,\nu} * f_{\alpha,\mu}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\alpha,\nu}(y) f_{\alpha,\mu}(x-y)\,dy = \frac{\alpha^{\nu+\mu}}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)} \int_0^x y^{\nu-1} \cancel{e^{-\alpha y}} (x-y)^{\mu-1} e^{-\alpha(x-y)} dy$

$\underset{t:=y/x}{=} \frac{e^{-\alpha x}\alpha^{\nu+\mu}}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)} \int_0^1 x^{\nu-1} t^{\nu-1} x^{\mu-1} (1-t)^{\mu-1} x\,dt = f_{\alpha,\nu+\mu}(x) \cdot \underbrace{\frac{\Gamma(\mu+\nu)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} \int_0^1 (1-t)^{\mu-1} t^{\nu-1} dt}_{=:c}$

$\Rightarrow f_{\alpha,\nu} * f_{\alpha,\mu} = f_{\alpha,\nu+\mu}$ und $c = 1$

(2) F Verteilungsfkt. von $X_i^2 \Rightarrow F(x) = P(X_i^2 \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{-t^2/2} dt \underset{\text{Symmetrie}, \; s=t^2}{=}$

$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{1}{2\sqrt{s}} e^{-s/2} ds \quad \Rightarrow X_i^2$ χ_1^2-verteilt mit Dichte $f_{1/2,1/2}$

und $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. $\underset{(1)}{\Rightarrow} X_1^2+\dots+X_n^2$ $\chi_1^2 * \dots * \chi_1^2 = \chi_n^2$-verteilt ∎

Faltung von Dichten wichtig für Summen unabhängiger ZV'en.

Analog Produkte / Quotienten von unabhängigen ZV'en. Bsp.:

7.22. Lemma. $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige ZV'e mit Verteilungen mit Dichten f, g mit $g \equiv 0$ auf $]-\infty, 0] \Rightarrow X/Y : \Omega \to \mathbb{R}$ ZV'e mit Dichte

$$h(t) = \int_0^\infty f(ty) g(y) y\,dy \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Beweis: $P(X/Y \leq v) = \iint_{\{(x,y):\, x \leq yv,\, y \geq 0\}} f(x) g(y)\,dx\,dy = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{yv} f(x) g(y)\,dx\,dy \underset{t = x/y,\; dx = y\,dt}{=}$

$= \int_0^\infty \int_{-\infty}^{v} f(ty) g(y)\, y\,dt\,dy \underset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{v} \underbrace{\int_0^\infty y f(ty) g(y)\,dy}_{h(t)}\,dt \quad \Rightarrow$ Beh. ∎