§8 Konvergenz von Zufallsvariablen und das starke Gesetz d. großen Zahlen.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W'raum, $X, X_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$ ZVe. Was heißt „$X_n \xrightarrow{n\to\infty} X$"?

Verschiedene Antworten.

Notation: $\forall x \in \mathbb{R}^d$: $|x| := \|x\|_2 := (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$

8.1 Def.:

① $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast sicher gg. X (Kurz: $X_n \xrightarrow{n\to\infty} X$ f.s.), falls
$$P(\underbrace{\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}}_{=:A}) = 1$$

Beachte: $A \in \mathcal{A}$; denn $\omega \in A \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall m \geq n : |X_m(\omega) - X(\omega)| \leq 1/k$.

also: $A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq n} \{\omega \in \Omega : |X_m(\omega) - X(\omega)| \leq 1/k\} \in \mathcal{A}$.

② $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert stochastisch gg. X (Kurz: $X_n \to X$ stochastisch), falls:
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P(\{\omega : |X_n(\omega) - X_n(\omega)| > \varepsilon\}) = 0.$$

③ $p \in \{1,2\}$. Dann konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im p-ten Mittel gg. X ($X_n \xrightarrow{\|\,\|_p} X$), falls: $X, X_n \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ $(n \in \mathbb{N})$ und $\|X - X_n\|_p = \left(\int |X_n - X|^p dP\right)^{1/p} \to 0$

Beachte: ⓐ Stoch. Konvergenz tritt im schwachen Gesetz d. gr. Zahlen §6 auf.

ⓑ $\|\,\|_p$ für $p \in [1,\infty]$ definierbar; $p = 1,2$ besonders wichtig.

8.2 Satz.

① $X_n \xrightarrow{\|\,\|_2} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\|\,\|_1} X$

② $X_n \xrightarrow{\|\,\|_1} X \Rightarrow X_n \to X$ stochastisch.

Beweis: ① $\int_\Omega |X_n - X| \cdot 1\, dP \overset{CSU}{\leq} \|X_n - X\|_2 \cdot \|1\|_2 \to 0$.

② $\varepsilon > 0 \Rightarrow P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \underset{f(x)=x}{\overset{\text{Markov-Ungl.}}{\leq}} \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega |X_n - X|\, dP = \frac{1}{\varepsilon}\|X_n - X\|_1 \to 0$ ∎

8.3 Def.: $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W'raum; $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$. Setze

$\liminf A_n := \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j\geq i} A_j \in \mathcal{A}$ Limes inferior der $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\limsup A_n := \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j\geq i} A_j \in \mathcal{A}$ Limes superior der $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

8.4 Lemma.

① $\limsup A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n$ für ∞-viele $n \in \mathbb{N}\}$.

② $\liminf A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n$ für alle bis auf höchst. endlich viele $n\}$.

③ $\liminf A_n \subset \limsup A_n$

④ $P(\liminf A_n) \le \liminf P(A_n) \le \limsup P(A_n) \le P(\limsup A_n)$.

Beweis: ① $\omega \in A_n$ für ∞-viele $n \Leftrightarrow \forall i\ \exists j \geq i : \omega \in A_j \Leftrightarrow \omega \in \bigcap_i \bigcup_{j \geq i} A_j$.

! ② analog zu ①; (Übung!) ③ klar mit ①, ②.

④ Mittleres $\le$ klar mit ③. Letztes „$\le$": $B_n := \bigcup_{k \geq n} A_k \Rightarrow B_{n+1} \subset B_n$

und $P(\limsup A_n) = P(\bigcap_n B_n) = \lim_n P(B_n) \geq \limsup_n P(A_n)$.

Erstes „$\le$" analog (Übung!) ■

8.5. Lemma von Borel-Cantelli: $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W'raum, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$.

① Falls $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) < \infty$, dann $P(\limsup_n A_n) = 0$

② Falls — " — $= \infty$ und die A_n unabhängig sind, dann $P(\limsup_n A_n) = 1$.

Beweis: ① $0 \le P(\bigcap_{i \geq 1} \bigcup_{j \geq i} A_j) \le P(\bigcup_{j \geq i} A_j) \le \sum_{j=i}^{\infty} P(A_j) \xrightarrow{i \to \infty} 0 \Rightarrow$ Beh.
$\forall i$

② $\forall x \geq 0: 1 - x \le e^{-x} \Rightarrow \forall\ 0 \le m \le k$:

$0 \le \prod_{i=m}^{k} (1 - P(A_i)) \le \exp(-\sum_m^k P(A_i)) \xrightarrow[k \to \infty]{} e^{-\infty} = 0 \Rightarrow \prod_m^{\infty} (1 - P(A_i)) = 0$.

$\Rightarrow 1 - P(\limsup A_i) = 1 - \lim_{m \to \infty} P(\bigcup_{i \geq m} A_i) = \lim_m P(\bigcap_{i \geq m} (\Omega \setminus A_i)) \underset{\Omega \setminus A_i \text{ unabh.}}{=}$

$= \lim_m \prod_{i \geq m} P(\Omega \setminus A_i) = \lim_{m \to \infty} \prod_{i \geq m} (1 - P(A_i)) = 0 \Rightarrow$ Beh. ■

Bsp: Im Schachtel ist anfangs 1 schwarze Kugel. Ziehe zufällig eine Kugel,

Variante üben! notiere Farbe, lege diese und jeweils eine zusätzliche weiße Kugel zurück.

$A_n :=$ „in n-ter Ziehung schwarz". $P(A_n) = 1/n$.

Die A_n sind unabhängig, und $\sum_1^{\infty} 1/n = \infty \Rightarrow$

Bei ∞-viele Ziehungen wird schwarze Kugel mit W'keit 1 ∞-oft gezogen!!

8.6. Satz: $X_n, X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ ZV'e, $n \in \mathbb{N}$. $\underbrace{X_n \to X \text{ fast sicher}}_{\text{„starke Konv."}} \Rightarrow \underbrace{X_n \to X \text{ stochastisch}}_{\text{„schwache" Konv.}}$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$, $i \in \mathbb{N}$, $B_i := \{\omega : |X_i(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}$.

$\Rightarrow 0 \leq \liminf P(B_i) \leq \limsup P(B_i) \leq P(\limsup_i B_i) = P(|X_i - X| \geq \varepsilon$ für ∞-viele $i)$

$= 0$, da $X_i \to X$ f.s. ∎

8.7. Satz: $X_n, X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ ZV'e $(n \in \mathbb{N})$. Dann: $X_n \xrightarrow{n\to\infty} X$ stochastisch

$\Leftrightarrow$ Jede Teilfolge von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat Teilfolge, die fast sicher gg. X konvergiert.

Beweis: „$\Rightarrow$" Eine Teilfolge einer stoch. konv. Folge ist selbst stoch. konvergent.

Zeige also: Jede stoch. konvergente Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat f.s. konvergente Teilfolge;

Dazu: $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists i_k \in \mathbb{N}$ mit $P(|X_{i_k} - X| \geq 1/k) \leq 1/2^k$. Dabei o.E. $i_k > i_{k-1}$.

Wähle $B_k := \{\omega : |X_{i_k}(\omega) - X(\omega)| \geq 1/k\}$. Dann $\sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) < \infty$

$\overset{8.5(1)}{\Longrightarrow} P(|X_{i_k} - X| \geq 1/k\ \infty\text{-oft}) = 0 \Rightarrow 1 = P\{|X_{i_k} - X| \geq \frac{1}{k}$ nur endlich oft$\}$

$\Rightarrow P(\{\omega : X_{i_k}(\omega) \to X(\omega)\}) = 1$.

„$\Leftarrow$": Annahme, Aussage falsch, d.h. $\exists \varepsilon > 0$ mit $a_n := P(|X_n - X| > \varepsilon) \not\to 0$

d.h.: $\exists C > 0$ und Teilfolge $(a_{i_k})_k$ mit $a_{i_k} \geq c\ \forall k$

Annahme $\Rightarrow \exists$ Teilfolge $(X_{i_{k_l}})_l$ die fast sicher und damit stoch. gg. X konvergiert.

$\Rightarrow a_{i_{k_l}} \xrightarrow{l\to\infty} 0$ Widerspruch ∎

Fazit: $L^2 \Rightarrow L^1 \Rightarrow$ stoch. $\Leftarrow$ f.s. bei Konvergenzarten.

8.8. Starkes Gesetz d. großen Zahlen: $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W-raum.

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ unkorrelierte ZV'e mit $\operatorname{Var} X_i \leq M < \infty\ \forall i \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \qquad Z_n := 1/n \sum_{i=1}^{n} (X_i - E(X_i)) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ f.s.

Anwendung:

① $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ unkorreliert, identisch verteilt $\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to E(X_1)$ f.s.

② Wegen Satz 8.6 gilt unter Bdgg. von Satz 8.8 auch das schwache Gesetz!

Beweis: Sei o.E. $E(X_i) = 0\ \forall i \in \mathbb{N}$ (sonst betrachte $X_i - E(X_i)$).

① Es gilt: $Z_{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ f.s.

Denn: $\operatorname{Var} Z_{n^2} = \frac{1}{n^4} \sum_{1}^{n^2} \operatorname{Var}(X_i) \leq M/n^2$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(|Z_{n^2}| > \varepsilon) \underset{\text{T-Ungl.}}{\leq} \operatorname{Var}(Z_{n^2})/\varepsilon^2 \leq \frac{M}{n^2 \varepsilon^2}$

Für $A_n := \{\omega \in \Omega : |Z_{n^2}(\omega)| \geq \varepsilon\}$ folgt: $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$

Lemma v. Borel-Cantelli: $\Rightarrow P(\limsup_n A_n) = 0$

$\Rightarrow 1 = P(\{\omega : |Z_{n^2}(\omega)| \geq \varepsilon$ nur endlich oft $\})$. $(\varepsilon > 0)$.

$\Rightarrow 1 = P\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{\omega : |Z_{n^2}(\omega)| \geq 1/k$ nur endlich oft $\}\right) = P(\{\omega : Z_{n^2}(\omega) \to 0\})$

② <u>Allg. Fall:</u>

Zu $m \in \mathbb{N}$ sei $n(m)$ mit $n(m)^2 \leq m < (n(m)+1)^2$. Vergleiche Z_m und $Z_{n(m)^2}$.

Wähle $S_k := \sum_1^k X_i \Rightarrow Var(S_m - S_{n(m)^2}) \leq (m - n(m)^2) \cdot M \underset{\text{T-Ungl.}}{\Rightarrow}$

$P(|S_m - S_{n(m)^2}| \geq \varepsilon\, n(m)^2) \leq M \cdot (m - n(m)^2) / \varepsilon^2 n(m)^4$

$\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} P\left(\frac{1}{n(m)^2} |S_m - S_{n(m)^2}| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{M}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n^2}^{(n+1)^2-1} \frac{m-n^2}{n^4} = \frac{M}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \frac{2n(2n+1)}{2}$

Lemma v. Borel-Cantelli liefert mit obigem Argument: $\boxed{\;} < \infty$

$P\left(\frac{1}{n(m)^2} |S_m - S_{n(m)^2}| \geq 1/k\right.$ für endl. viele $\left.m\right) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Nach ① gilt $P(|S_{n(m)^2}| / n(m)^2 \geq 1/k$ für endl. viele $m) = 1 \;\forall k$.

Zusammen $\Rightarrow P\left(\frac{1}{n(m)^2} |S_m| \geq 1/k\right.$ endlich oft$\left.\right) = 1 \quad \forall k$

$m \geq n(m)^2$

$\Rightarrow$ wie in ① $P(S_m/m \to 0) = 1$ ∎

Satz 8.8 gilt auch unter alternativen Bedingungen. In Stoch. II zeigen wir etwa:

<u>8.9 Starkes Gesetz v. Kolmogorov:</u> $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ unabhängig und identisch verteilt mit $m := E(X_i)$ $(i \in \mathbb{N})$ $\Rightarrow$

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow m$ f.s.

Neben bisherigen Konvergenzbegriffen ist weiterer wichtig. Dazu:

<u>8.10. Def.:</u>

① $M^1(\mathbb{R}^d) = \{\mu : \mu$ W'maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))\}$.

② $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} : f$ stetig und beschränkt$\}$

(f beschränkt $:\Leftrightarrow \exists M > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| \leq M$).

③ $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} : f$ stetig <u>und</u> $\exists K \geq 0\; \forall x \in \mathbb{R}^d$ mit $\|x\| \geq k : f(x) = 0\}$.

Raum d. stetigen Funktionen mit kompaktem Träger.

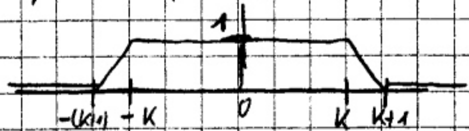
Es gilt: $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

(2) Seien $\mu, \mu_n \in M^1(\mathbb{R}^d)$, $n\in\mathbb{N}$. Dann konvergiert $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gg. μ (kurz: $\mu_n \xrightarrow{n\to\infty} \mu$) falls $\forall f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f\,d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^d} f\,d\mu$.

(3) $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ W'raum, $X_n, X: \Omega\to\mathbb{R}^d$ ZV'e ($n\in\mathbb{N}$) mit Verteilungen $P_X, P_{X_n} \in M^1(\mathbb{R}^d)$. Dann:
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in Verteilung gg. X $:\Leftrightarrow$ $P_{X_n} \to P_X$ schwach.

8.11 Lemma: $\mu_n,\mu\in M^1(\mathbb{R}^d)$ mit: $\forall f\in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ $\int f\,d\mu_n \to \int f\,d\mu$
Dann $\mu_n\to\mu$ schwach.

Beweis für $d=1$ (allg. Fall analog): Sei $f\in\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$. Zu $k\in\mathbb{N}$ betrachte $f_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ wie folgt



Dann $f_{k+1} \ge f_k \uparrow 1$ punktweise.
Satz v. monotoner Konvergenz §5 $\Rightarrow$ $\int f_k\,d\mu \uparrow \int 1\,d\mu = 1$ $\Rightarrow$
$\forall\varepsilon>0\ \exists k\in\mathbb{N}: \int f_k\,d\mu \ge 1-\varepsilon/2$. Annahme $\Rightarrow$ $\int f_k\,d\mu_n \xrightarrow{n\to\infty} \int f_k\,d\mu$
$\Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\ge n_0: \int f_k\,d\mu_n \ge 1-\varepsilon$.
Sei $n\ge n_0$ und $M := \|f\|_\infty < \infty$ $\Rightarrow$
$|\int f(1-f_k)\,d\mu_n| \le M\int(1-f_k)\,d\mu_n \le M\varepsilon$. Analog $|\int f(1-f_k)\,d\mu| \le M\varepsilon$ $\Rightarrow$
$|\int f\,d\mu_n - \int f\,d\mu| \le \underbrace{|\int f(1-f_k)\,d\mu_n| + |\int f(1-f_k)\,d\mu|}_{\le 2M\varepsilon} + \underbrace{|\int f f_k\,d\mu_n - \int f f_k\,d\mu|}_{\le\varepsilon \text{ für } n \text{ groß}}$
$\le (2M+1)\varepsilon$ für n groß genug $\Rightarrow$ Beh. ■

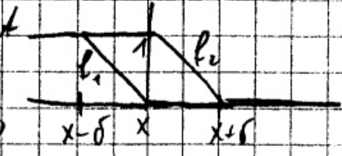
8.12 Satz: $X_n, X:\Omega\to\mathbb{R}^d$ ZV'e mit $X_n\to X$ stoch. $\Rightarrow$ $X_n\to X$ in Verteilung

Beweis: Sei $f\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ (o.E. wg. Lemma 8.11!) und $\varepsilon>0$.
$\Rightarrow$ f glm. stetig, d.h.: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,y\in\mathbb{R}^d, |x-y|\le\delta: |f(x)-f(y)|<\varepsilon$.
Sei $A_i := \{\omega: |X_i(\omega)-X(\omega)|>\delta\}$ $\Rightarrow$
$|\int_{\mathbb{R}^d} f\,dP_{X_i} - \int_{\mathbb{R}^d} f\,dP_X| \underset{\text{Trafoformel}}{=} |\int_\Omega f\circ X_i\,dP - \int_\Omega f\circ X\,dP| \le$
$\le \int_{A_i}\underbrace{|f\circ X_i - f\circ X|}_{\le 2M}\,dP + \int_{\Omega\setminus A_i}|f\circ X_i - f\circ X|\,dP \le 2M\cdot P(A_i)+\varepsilon \le 3\varepsilon$,
falls i groß genug $\Rightarrow$ Beh. ■

Auf $\mathbb{R}$ Konvergenz in Verteilung auch über Konvergenz d. Verteilungsfunktionen beschreibbar:

8.13 Satz. $\mu_n, \mu \in M^1(\mathbb{R})$ mit Verteilungsfkt'en F_n, F $(n \in \mathbb{N})$.
Dann: $\mu_n \to \mu$ schwach $\iff$ $\forall x \in \mathbb{R}$, in denen F stetig ist:
$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x).$$

Beweis: „$\Rightarrow$": Sei F stetig in $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall y$ mit $|y-x|<\delta$: $|F(x)-F(y)| \le \varepsilon$. Wähle $f_1, f_2 \in C_b(\mathbb{R})$ mit



$\Rightarrow$ $F_n(x) = \mu_n(]-\infty, x]) \le \int_{\mathbb{R}} f_2(z)\, d\mu_n(z)$ $\Rightarrow$

$\limsup_n F_n(x) \le \limsup_n \int f_2\, d\mu_n \underset{\text{Annahme}}{=} \int f_2\, d\mu \le F(x+\delta) \le F(x)+\varepsilon \quad \forall \varepsilon>0$

$\Rightarrow$ $\limsup_n F_n(x) \le F(x)$ analog $\liminf_n F_n(x) \ge F(x)$ $\Rightarrow$ $\lim_n F_n(x) = F(x)$

„$\Leftarrow$": Wg. Lemma 8.11 zu zeigen: $\forall f \in C_c(\mathbb{R})$: $\int f\, d\mu_n \to \int f\, d\mu$.
Wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $f(x)=0\ \forall |x| \ge k$; Sei $\varepsilon>0$; f glm. stetig $\Rightarrow$ $\exists r \in \mathbb{N}$ und Gitter $-k = t_1 < t_2 < \dots < t_r = +k$ mit $|f(x)-f(t_i)| \le \varepsilon$ für $x \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, \dots, r+1$

Dabei $t_1, \dots, t_n$ so wählbar, daß F in $t_1, \dots, t_r$ dort stetig. (vgl. unten).
Dann $|\mu_n(]t_i, t_{i+1}]) - \mu(]t_i, t_{i+1}])| = |F_n(t_{i+1}) - F_n(t_i) + F(t_{i+1}) - F(t_i)|$
$\le \varepsilon/r \quad \forall i = 1, \dots, r-1$, sofern n groß genug.

$\Rightarrow$ $|\int f\, d\mu_n - \int f\, d\mu| = \left|\sum_{i=1}^{r-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (f(x) - f(t_{i+1}))\, d\mu_n - \sum \int (\dots)\, d\mu\right| + 2\|f\|_\infty \varepsilon$

$\le 2\|f\|_\infty \varepsilon + 2\varepsilon$ $\Rightarrow$ Beh. ■

8.14 Bem. $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ Verteilungsfkt. $\Rightarrow$ F in höchstens abzählbar vielen $x \in \mathbb{R}$ unstetig.

Denn: $\{x \in \mathbb{R} : F \text{ in } x \text{ unstetig}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{x \in \mathbb{R} : F(x) - F(x^-) \ge 1/n\}}_{\text{Max. abzählbar}}$.

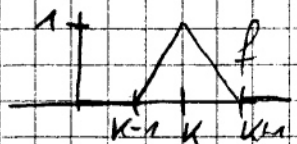
Fazit: Für $\mathbb{R}$-wertige ZV'e:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{f.s.} & \Rightarrow & \text{stoch} & \Leftarrow & L^1 & \Leftarrow & L^2 \\ & & \Downarrow & & & & \\ & & \text{in Verteilung} & & & & \end{array}$$

Frage: Überprüfung d. schwachen Konvergenz. Hier Antwort im diskreten Fall:

8.15. Lemma: $\mu_n, \mu \in M^1(\mathbb{R})$ der Form $\mu_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_{n,k}\,\delta_k$, $\mu = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k\,\delta_k$.
Dann: $\mu_n \to \mu$ schwach $\iff \forall k\in\mathbb{N}: p_{n,k} \to p_k$.

Beweis: „$\Rightarrow$": $f \in C_c(\mathbb{R})$ mit $f \equiv 0$ auf $\mathbb{R}\setminus[-m,m]$.
Dann $\int f\,d\mu_n = \sum_{k=-m}^{m} p_{n,k}\, f(k) \longrightarrow \sum_{-m}^{m} p_k\, f(k) = \int f\,d\mu$
Aussage folgt aus Lemma 8.11.
„$\Leftarrow$": Zu $k\in\mathbb{Z}$ wähle f als



Dann $p_{n,k} = \int f\,d\mu_n \to \int f\,d\mu = p_k$ ∎

Bsp: $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]0,1[$ mit $n\cdot p_n \longrightarrow \lambda > 0$.
Dann $B_{n,p_n} \to \pi_\lambda$ schwach.