Fourier-Reihen
und
Fourier-Integrale

Skript nach einer Vorlesung von Prof. Walter

Universität Dortmund
Wintersemester 2004/2005
Pascal Szacherski

Letzte Änderung: 14. Februar 2005

Dies ist eine Mitschrift der Vorlesungen Fourierreihen und -integrale vom Wintersemester 2004/2005, gehalten von em. Prof. Walter an der Universität Dortmund. Ich habe versucht, alles richtig wiederzugeben, diese Mitschrift erhebt allerdings keinen Anspruch auf Vollständigkeit noch auf Richtigkeit (Irren ist menschlich). Ebenso ist dies kein verifiziertes, autorisiertes oder offizielles Skript. Deshalb ist bei Fehlern zuerst davon auszugehen, dass sie von mir stammen. (Für Korrekturen bin ich dankbar![1]) Es darf nur kostenlos oder zum Selbstkostenpreis weitergegeben werden. Ich untersage jegliche kommerzielle Nutzung durch Dritte.

Erklärungen:

Neben den üblichen Symbolen für die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ etc. werden die im Skript benutzten Symbole und Schreibweisen erklärt:

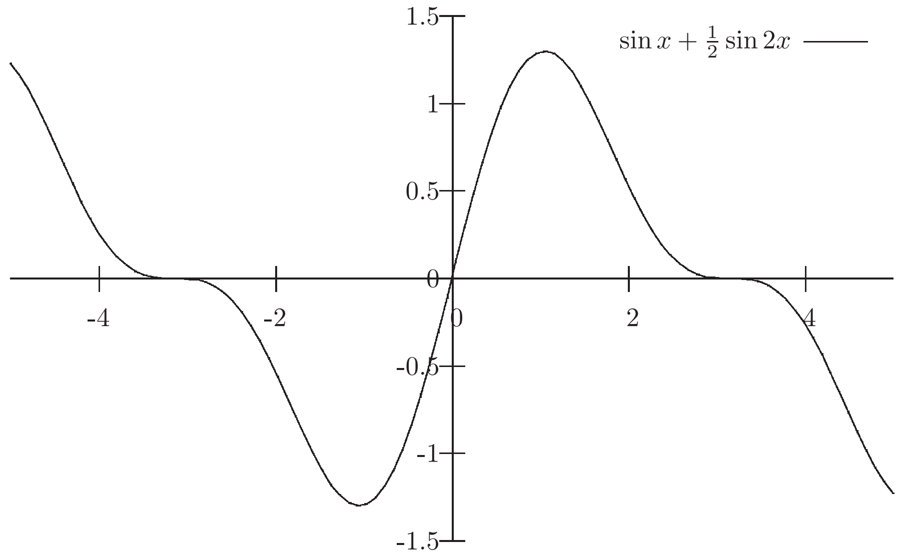
Symbol/Schreibweise	Bedeutung
sp	Spann
$\mathcal{L}^1$	Raum der Lebesgue-integrierbaren Funktionen (auch Leb_1)
$\mathcal{L}^2$	Raum der quadratisch-integrierbaren Funktionen
$\mathcal{L}^p$	Raum der lokal integrierbaren Funktion, wobei $\|F\|^p$ ebenfalls integrierbar ist
$\langle . , . \rangle$	Skalarprodukt
o	Landausymbol, Klein-o
$\mathcal{C}^k[a,b]$	Vektorraum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$
$\mathbb{S}^k$	k-dim. Sphäre
$\mathbf{1}_\Omega$	Charakteristische Funktion auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: $\mathbf{1}_\Omega := \begin{cases} 1 & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases}$
$K_1^0(\mathbb{R})$	$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ stetig mit kompaktem Träger}\}$

[1] pascalsz@aol.com

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Fourier-Reihen



Periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) mit: $\exists\, P > 0\ :\ f(t+P) = f(t)\ \forall\, t \in \mathbb{R}$

Phänomene Zerlegung in Grundtöne (beschrieben durch Kreisfunktionen $(\sin, \cos)$ und Obertöne $(\sin(nt), \cos(nt))$). Im Allgemeinen hat man eine unendliche Serie von Obertönen mit unterschiedlichen Amplituden.

Fourier-Analyse Berechnung der Amplituden

Fourier-Synthese Zusammensetzung von Obertönen
Wir setzen o.B.d.A. $P = 2\pi$, zu erreichen durch Maßstabsänderung

$$f(t+P) = f(t) \;\Rightarrow\; g(x) := f(\tfrac{P}{2\pi}x) \text{ mit}$$
$$g(x+2\pi) = f(\tfrac{P}{2\pi}(x+2\pi)) = f(\tfrac{P}{2\pi}x + P) = f(\tfrac{P}{2\pi}x) = g(x)$$

Generalvoraussetzung f ist 2π-periodisch und f über $[0, 2\pi]$ Lebesgue-integrierbar

Grundproblem Wann kann f aus Grund- und Oberschwingungen aufgebaut werden? D.h. wann existiert eine Darstellung

$$\begin{array}{lll} f(x) = \underset{\text{Konstante}\uparrow}{\frac{a_0}{2}} & +(a_1 \cos x + b_1 \sin x) & \text{(Grundschwingung)} \\ & +(a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) & \text{(Erste Oberschwingung)} \\ & +(a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x) & \text{(Zweite Oberschwingung)} \\ & + \ldots & \end{array}$$

(so genannte *Fourier-Reihe*, a_j, b_j *Fourier-Koeffizienten* (Amplituden))

Hinweis Zu $a, b \in \mathbb{R}$ existieren $A, \varphi \; \forall \, x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ll} & a \cos x + b \sin x = A \cos(x - \varphi) \\ \Leftrightarrow & a \cos x + b \sin x = A (\cos x \cos \varphi + \sin x \sin \varphi) \\ \Leftrightarrow & a = A \cos \varphi, \; b = A \sin \varphi \\ \Leftrightarrow & a^2 + b^2 = A^2, \; \varphi = \arg(a, b) \; (\tan \varphi = \frac{b}{a}) \end{array}$$

A nennt man die *Gesamtamplitude*, φ Phasenverschiebung. Außerdem gilt $a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx) = A_j \cos(jx - \varphi_i), \; i = 1, 2, \ldots$

A[1.1] Definition und Lemma

Jedes Intervall $[\alpha, \beta]$ mit $\beta - \alpha = 2\pi$ heißt Periodenintervall ($[0, 2\pi]$, $[-\pi, \pi]$). f ist durch die Restriktion auf ein Periodenintervall eindeutig bestimmt, z.B. gilt $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$

Definition

Zwei Funktionen $f, g : [0, 2\pi]$ heißen orthogonal, wenn

$$\int_0^{2\pi} f(x) g(x)\,dx = 0$$

B[1.1] Lemma

1. $\int\limits_0^{2\pi} \cos kx\,dx = 0 \; \forall \, k \in \mathbb{N}$ (für $k = 0 : \int\limits_0^{2\pi} \cos kx\,dx = 2\pi$).
2. $\int\limits_0^{2\pi} \sin kx\,dx = 0 \; \forall \, k \in \mathbb{N}_0$
3. $\int\limits_0^{2\pi} \cos kx \, \cos lx\,dx = \int\limits_0^{2\pi} \sin kx \, \sin lx\,dx = \pi \cdot \boldsymbol{\delta}_{kl}$ für $k, l \in \mathbb{N}$
4. $\int\limits_0^{2\pi} \cos kx \, \sin lx\,dx = 0 \; \forall \, k, l \in \mathbb{N}_0$

Die Relationen, bei denen 0 herauskommt, sind die so genannten *Orthogonalitätsrelationen*.

Beweis

zu 1., 2. elementares Integrieren

zu 3. $2\pi\boldsymbol{\delta}_{kl} = \int_0^{2\pi} \cos(k-l)x\,dx = \int_0^{2\pi} \big(\cos kx\,\cos lx \,+\, \sin kx\,\sin lx\big)\,dx$

$0 = \int_0^{2\pi} \cos(k+l)x\,dx = \int_0^{2\pi} \big(\cos kx\,\cos lx - \sin kx\,\sin lx\big)\,dx$. Addition bzw. Subtraktion liefert die Behauptung.

zu 4. analog

C[1.1] Satz
Notwendige Bedingung für die Fourier-Koeffizienten

Gilt im Intervall $[0, 2\pi]$

$$f(x) = \tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx \,+\, b_k \sin kx) \tag{1.1}$$

gleichmäßig, so folgt zwangsläufig

(Euler-/Fourierformeln)
$$a_k = \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\cos kx\,dx \qquad \text{für } k \geq 0$$
$$b_k = \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\sin kx\,dx \qquad \text{für } k \geq 1$$

Beweis

Multipliziere (1.1) mit $\cos nx$ – dies zerstört nicht die glm. Konvergenz – und integriere gliedweise.

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\cos nx\,dx = \tfrac{a_0}{2}\cdot\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{2\pi} a_k\,\cos kx\,\cos nx\,dx + \int_0^{2\pi} b_k\,\sin kx\,\cos nx\,dx\right)$$

$$= \begin{cases} \tfrac{a_0}{2}\cdot 2\pi = a_0\pi & n = 0 \\ a_n\pi & n \geq 1 \end{cases}$$

$$= a_n\pi \iff a_n = \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\cos nx\,dx.$$

Analog für b_n (multipliziere mit $\sin nx$). ■

D[1.1] Komplexe Schreibweise

$F_n(x) := \dfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\,\cos kx + b_k\,\sin kx)$ n-te Teilsumme der Fourier-Reihe

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos kx = \tfrac{1}{2}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right) \\ \sin kx = \tfrac{1}{2i}\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) = -\tfrac{i}{2}\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) \\ e^{\pm i\xi} = \cos\xi \pm i\sin\xi \end{array}}$$

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[a_k\frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}) - b_k\frac{i}{2}(e^{ikx} - e^{-ikx})\right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2}(a_k - ib_k)e^{ikx} + \frac{1}{2}(a_k + ib_k)e^{-ikx}\right] \\ &= \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{=:c_0} + \sum_{k=1}^{n}\underbrace{\frac{1}{2}(a_k - ib_k)}_{=:c_k} + \sum_{k=1}^{n}\underbrace{\frac{1}{2}(a_k + ib_k)e^{-ikx}}_{=:c_{-k}} \end{aligned}$$

$$\boxed{F_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_n e^{ikx}} \tag{1.2}$$

(c_k komplexe Fourier-Koeffizienten)

$$\begin{array}{lll}
\text{Für } k \geq 0: & c_k & = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\cos kx\,dx - \frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\sin kx\,dx\right) \\
 & & = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{-ikx}\,dx \\
\text{Für } k < 0: & c_k & = \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\cos(-kx)\,dx + \frac{i}{2}\int_0^{2\pi} f(x)\,\sin(-kx)\,dx\right) \\
 & & = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{ikx}\,dx
\end{array}$$

gemeinsam:

$$\boxed{c_k = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{-ikx}\,dx \ \ \forall\, k \in \mathbb{Z}} \tag{1.3}$$

Somit wissen wir: $f(x) \sim \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$

Konvergenz dieser Reihe bedeutet Konvergenz von $F_n(x)$, $n \to \infty$

E[1.1] Satz (Potenzreihe impliziert Fourier-Reihe)

Ist eine Potenzreihe mit Zentrum 0 gegeben durch

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n,\ |z| < R := \text{Konvergenzradius}$$

und ein $\rho\, \in] - R; +R[$ fest, so erhält man durch Einsetzen von $z = \rho \cdot e^{ix}$ eine gleichmäßig konvergente Fourier-Reihe bzgl. $x \in \mathbb{R}$:

$$f(\rho e^{ix}) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \rho^n e^{inx}\ \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

Beweis

Potenzreihe konvergiert für $|z| \leq \rho$ gleichmäßig, also auch für $z = \rho e^{ix}$, da $|z| = |\rho|\,|e^{ix}| = |\rho| < R$.
■

F[1.1] Beispiel

$\dfrac{1}{1-z} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k,\ |z| < R = 1$

Man setze $z = \rho e^{ix},\ \rho \in] - 1; 1[\Longrightarrow$

$$\frac{1-\rho e^{-ix}}{|1-\rho e^{ix}|^2} \ \underset{\text{konj.Kompl.}}{\overset{\Leftarrow \text{ Erweit.m.}}{=\!=\!=}}\ \frac{1}{1-\rho e^{ix}} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n e^{inx} \quad \text{gleichmäßig bzgl. } x \in \mathbb{R}$$

Trenne Real- und Imaginärteil:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cos nx = \frac{1-\rho\cos x}{1-2\rho\cos x+\rho^2} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \sin nx = \frac{1-\rho\sin x}{1-2\rho\cos x+\rho^2} \end{array}} \ \text{gleichmäßig } \forall\, x \in \mathbb{R}, \text{ festes } |\rho| < 1$$

Was passiert bei $|\rho| = 1$?

$1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}\ \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$
$\Rightarrow z = e^{ix}\ (\rho = 1)$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow 1 + e^{ix} + e^{2ix} + \ldots + e^{nix} &= \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \qquad (e^{ix} \neq 1) \\
&\underset{e^{-\frac{ix}{2}}}{\overset{\text{Erw.mit}}{=\!=}} \frac{e^{-\frac{ix}{2}} - e^{-i\left((n+1)x - \frac{1}{2}x\right)}}{e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}}} \\
&= \frac{\cos\frac{x}{2} - i\sin\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x - i\sin(n+\frac{1}{2})x}{-2i\sin\frac{x}{2}}
\end{aligned}
$$

Nach Erweitern mit i erhält man:

$$
\begin{aligned}
&\text{(I)} \quad \tfrac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} \\
&\text{(II)} \quad \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}
\end{aligned}
$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$ (bei $a \in 2\pi \cdot \mathbb{Z}$ hat die rechte Seite eine hebbare Singularität)

Beim Grenzübergang $n \to \infty$ i. A. keine Konvergenz: **ABER**: Integration von der Mitte π liefert ($x \in]0; 2\pi[$)

$$
\begin{aligned}
\text{(I)} \Rightarrow\ & \int_\pi^x \cos kt\, dt = \left[\frac{\sin kt}{k}\right]_\pi^x = \frac{\sin kx}{k} \\
& \tfrac{1}{2}(x-\pi) + \sin x + \tfrac{1}{2}\sin 2x + \ldots + \tfrac{1}{n}\sin nx = \int_\pi^x \underbrace{\sin(n+\tfrac{1}{2})t}_{u'} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}}_{v}\, dt \\
& = \frac{cos(n+\frac{1}{2})x}{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \int_\pi^x \cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right) t \cdot \frac{\cos\frac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}}\, dt \\
& =: J_n
\end{aligned}
$$

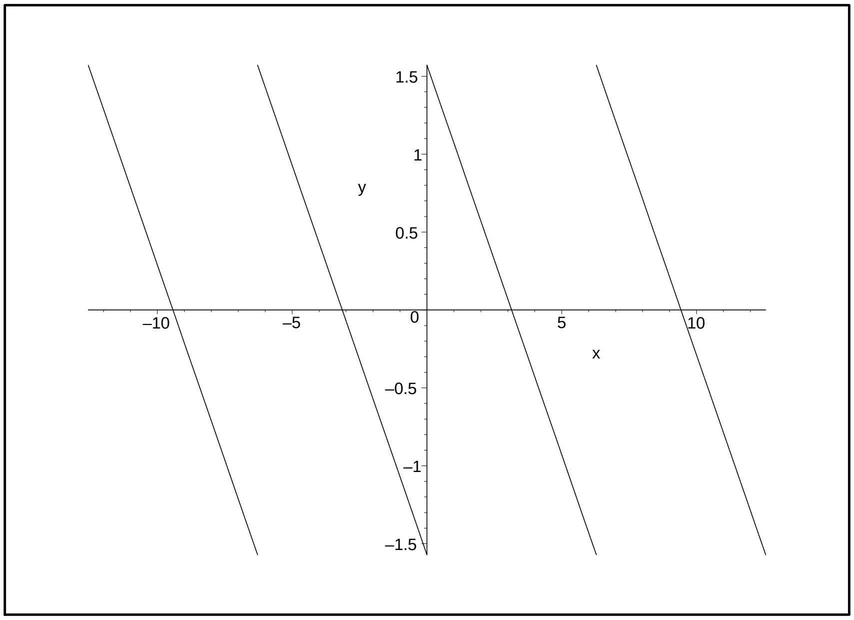
Wegen des Nenners sieht man:

$$
\begin{aligned}
J_n &\xrightarrow{n\to\infty} 0, && \text{falls } x \in]0; 2\pi[\\
J_n &\xrightarrow{n\to\infty} 0\,\text{glm.}, && \text{falls } x \in]\delta; 2\pi - \delta[\ \text{ für } 0 < \delta < \pi
\end{aligned}
$$

Also gilt für solche x:

$\frac{1}{2}(x-\pi) + \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \ldots + \frac{1}{n}\sin_x \to 0$

$$
\tfrac{1}{2}(\pi - x) = \sin x + \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x + \ldots \begin{cases} \text{punktweise} & \text{falls } x \in]0; 2\pi[\\ \text{gleichmäßig} & \text{falls } x \in]\delta; 2\pi - \delta[\end{cases}
$$



G[1.1] Bemerkung

Bei dem Einsetzungsprozess in E[1.1] kann anstelle von reellem ρ auch komplexes ρ mit $|\rho| < R$ genommen werden. Beweis: der Gleiche.

H[1.1] Lemma

(i)	f gerade Funktion	$\Rightarrow$	$b_n = 0 \,\forall\, n \in \mathbb{N}_0$
(ii)	f ungerade Funktion	$\Rightarrow$	$a_n = 0 \,\forall\, n \in \mathbb{N}_0$

Beweis

zu (i) ((ii) analog) Gerade $\Leftrightarrow f(x) = f(-x) \,\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\pi b_n &= \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \\
&\overset{t:=-x}{=\!=} \int_{\pi}^{-\pi} f(-t) \sin\big(n(-t)\big)\,(-dt) \\
&= -\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt = -\pi b_n
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow b_n = 0$ ∎

I[1.1] Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0;\pi] \\ 2\pi - x & x \in [\pi; 2\pi] \end{cases}$$

Betrachte die 2π-periodische Fortsetzung.

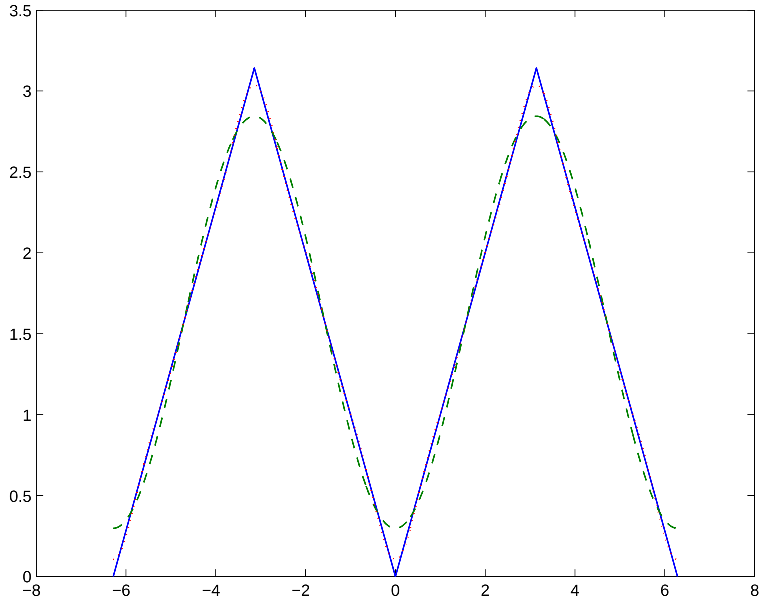


Abbildung 1.1: $f(x)$ (—) und ihre Fouriersummen bis $n = 3$ (- -) und $n = 5$ (···)

f ist gerade $\Rightarrow b_n = 0 \,\forall\, n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
\pi a_0 &= \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \pi^2 \\
\pi a_n &= \int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx \\
&= \int_0^{\pi} x\cos nx\,dx + \underbrace{\int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - x)\cos nx dx)}_{\overset{=\!=}{t:=2\pi-x} - \int_\pi^0 t\cos\left(n(2\pi-t)\right)dt = \int_0^\pi t\cos nt\,dt} \\
&= 2\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{2}{n^2}\left((-1)^n - 1\right) \\
a_n &= \begin{cases} 0 & n > 1 \text{ grade} \\ \frac{-4}{\pi}\frac{1}{n^2} & n \text{ ungerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right)}$$

$\left(\text{konvergent wegen Majorante } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\right)$

Die Darstellung ist offen, Konvergenz (sogar glm.) gegeben!

1.2 Approximation im quadratischen Mittel

Betrache $T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$, das so genannte *trigonimetrische Polynom* mit $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, Grad $\leq n$, Grad $= n$ falls $\alpha_n \neq 0$ oder $\beta_n \neq 0$.

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - T_n(x)|^2\,dx$$

Wir werden zeigen: Dieses Integral hat ein Minimum genau für $\alpha_k = a_k, \beta_k = b_k$.

A[1.2] Definition

Nenne $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ *quadratisch integrierbar*, wenn f und $|f|^2$ integrierbar sind, d.h. $f, |f|^2 \in \mathcal{L}^1\big([a;b]\big)$.
Ziel: Diese f bilden einen Vektorraum!

B[1.2] Lemma

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und

1. $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $\Phi(0,0) = 0$
2. $f, g \in \mathcal{L}^1(A)$
3. Zu $\varphi : A \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) := \Phi\big(f(x), g(x)\big)$ existiert eine Majorante $\gamma \in \mathcal{L}^1$, d.h. $|\varphi(x)| \leq \gamma(x)$ fast überall in A.

Dann ist $\varphi \in \mathcal{L}^1(A)$

Beweis

O.B.d.A. $A = \mathbb{R}$, sonst Nullfortsetzung.

> Einschub:
> $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar $:\Leftrightarrow \exists$ Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ stetiger Funktionen mit kompakten Träger, die f.ü. gg. f pktw. konvergiert und eine Cauchy-Folge bzgl. $\|.\|_1$ bildet.
> Dann: $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx := \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,dx \quad \in \mathbb{R}$
> $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger: $\|g\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,dx$
> $\mathrm{Tr}(g) := \overline{\{x \in \mathbb{R} \,:\, g(x) \neq 0\}}$ kompakt

Wegen 1. existieren Folgen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ für f und $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ für g mit $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ und $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x) = g(x)$ fast überall.
Da Φ stetig ist, folgt $\lim\limits_{k\to\infty} \underbrace{\Phi(f_k(x), g_k(x))}_{=:\varphi_k(x)} = \underbrace{\Phi(f(x), g(x))}_{=\varphi(x)}$ f.ü.

Zwischenbehauptung: $\varphi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit kompaktem Träger.

Zwischenbeweis:

- *Stetigkeit* klar
- *Träger*:

$$
\begin{aligned}
\varphi_k(x) \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad \Phi(f_k(x), g_k(x)) \neq 0 \\
&\Rightarrow \quad f_k(x) \neq 0 \text{ oder } g_k(x) \neq 0 \\
&\Rightarrow \quad x \in \mathrm{Tr}(f_k) \cup \mathrm{Tr}(g_k) \\
\mathrm{Tr}(\varphi_k) \quad &= \quad \overline{\{x \,:\, \varphi_k(x) \neq 0\}} \subseteq \overline{\mathrm{Tr}(f_k) \cup \mathrm{Tr}(g_k)} \\
&= \quad \overline{\mathrm{Tr}(f_k)} \cup \overline{\mathrm{Tr}(g_k)} = \mathrm{Tr}(f_k) \cup \mathrm{Tr}(g_k)
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow \mathrm{Tr}(\varphi_k)$ kompakt

Weiter $|\varphi(x)| \leq \gamma(x)$. Also folgt laut **Analysis II. Walter. I.[11.5]**[1] die Behauptung. ■

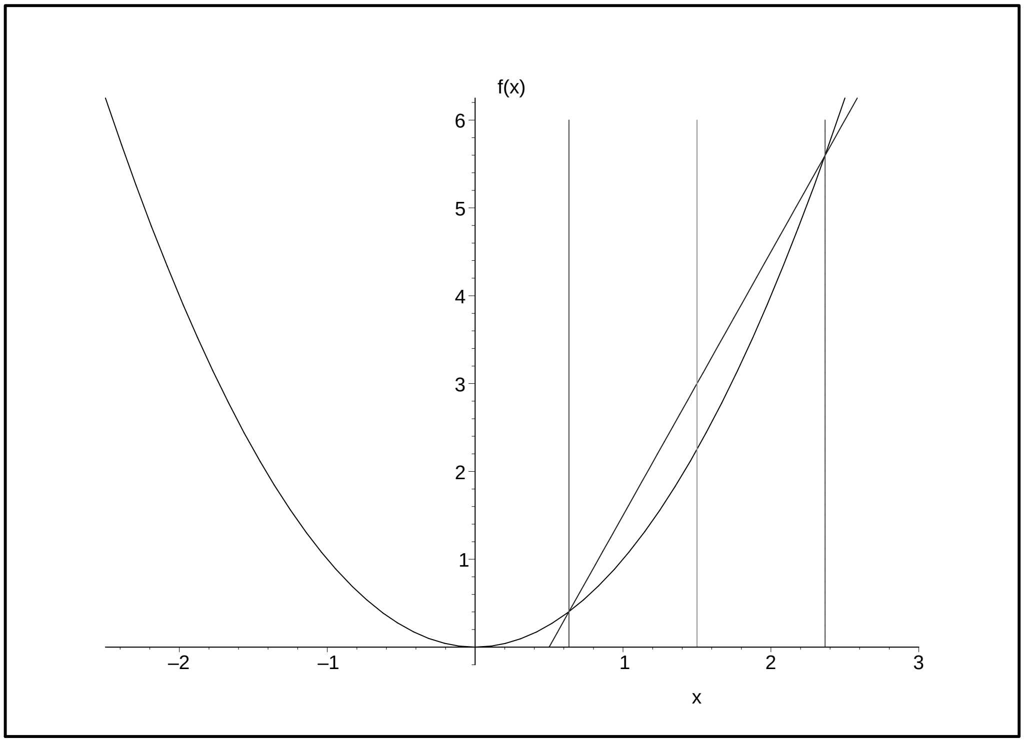
[1] Sei (f_k) eine Folge in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ f.ü., $\exists\, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ mit $|f(x)| \leq g(x)$; dann $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

C[1.2] Lemma

Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ quadratisch integrierbar, so auch $f + g$.

Beweis

Wende B[1.2] auf $\Phi(u, v) = |u + v|^2$, $u, v \in \mathbb{R}$, $A := [a, b]$ an. Majorante für $\Phi\big(f(x), g(x)\big) =: \varphi(x)$.



Wegen der Konvexität der Funktion $t \mapsto t^2$ gilt

$$\left(\frac{r+s}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}\left(r^2 + s^2\right) \ \forall\, r, s \in \mathbb{R}$$

Damit: $\varphi(x) = |f(x) + g(x)|^2 \leq 2\big(f(x)^2 + g(x)^2\big)$ also $\varphi = |f + g|^2$ integrierbar über $[a, b]$, also $f + g$ quadratisch integrierbar.

Zusatz Auch $f \cdot g$ ist integrierbar.

Beweis: $f \cdot g = \frac{1}{4}\big(|f + g|^2 - |f - g|^2\big) \in \mathcal{L}([a, b])$. ■

D[1.2] Definition und Satz

Sei $\mathcal{L}^2([a, b]) := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ quadr. integrierbar}\}$. Dann:

1. $\mathcal{L}^2([a, b])$ ist ein Vektorraum, und durch $\langle f, g\rangle := \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\, dx$ definieren wir auf $\mathcal{L}^2([a, b])$ eine symmetrische, positiv definite Bilinearform mit der zugehörigen Norm $\|f\|_2 := \langle f, f\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\displaystyle\int_a^b f(x)^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$, die so genannte $\mathcal{L}^2$-Norm.

2. $\|f\|_2 = 0 \ :\Longleftrightarrow \ f(x) = 0$ fast überall auf $[a,b]$.
   Betrachtet man zwei Funktionen als gleich, wenn sie sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden, so bildet $\mathcal{L}^2([a,b])$ einen *Prähilbert-Raum*.

3. In $\mathcal{L}^2([a,b])$ gilt die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung
   $$|\langle f,g\rangle| \le \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$$
   mit Gleichheit genau dann, wenn f,g in $\mathcal{L}^2([a,b])$ linear abhängig sind, d.h. $\exists\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $\alpha f(x) + \beta g(x) = 0$ fast überall.

Beweis

1. Vektorraum-Eigenschaften sind klar, da mit f,g auch $f+g$ quadratisch integrierbar sind ($\leadsto$ C[1.2]), aber auch αf, da $|\alpha f|^2 = \alpha^2\,|f|^2$. $\langle f,g\rangle$ offensichtlich bilinear bzgl. f,g, symmetrisch und $\langle f,f\rangle = \int_a^b \big(f(x)\big)^2\,dx \ge 0$.

2. $$\begin{aligned}\|f\|_2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad f(x)^2 = 0 \text{ f.ü.}\\ &\Leftrightarrow \quad f(x) = 0 \text{ f.ü.}\end{aligned}$$

3. In $\mathcal{L}^2([a,b])$ mit der neuen Gleichheitsdefinition ist das Sklalarprodukt sogar positiv definit ($a < b$ nötig!), also gilt die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung. ■

Später wird gezeigt: $\mathcal{L}^2([a,b])$ ist vollständig (vorerst nicht gebraucht).

E[1.2] Folgerung

In $\mathcal{L}^2([a,b])$ gilt

1. die *Dreiecksungleichung* $\|f+g\|_2 \le \|f\|_2 + \|g\|_2$
2. der *Satz des Pythagoras* $\langle f,g\rangle \Longleftrightarrow \|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$

f,g orthogonal $\Longleftrightarrow \langle f,g\rangle = 0$

F[1.2] Beispiel

Die harmonischen Grundfunktionen

$$\begin{aligned} g_0 &= 1\\ g_n(x) &= \cos nx\\ h_n(x) &= \sin nx \qquad (n = 1,2,\ldots)\end{aligned}$$

bilden z.B. in der Folge $g_0, g_1, h_1, g_2, h_2, \ldots$ angeordnet ein *Orthogonalsystem* im $\mathcal{L}^2([0;2\pi])$, d.h. sie sind paarweise orhogonal. Sie sind nicht auf 1 normiert sondern

$$\|g_0\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} {g_0}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi}$$
$$\|g_n\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} g_n^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 nx\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$$
$$\|h_n\|_2 = \sqrt{\pi}$$

Normierung auf 1:

$\widetilde{g_0} := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g_0;\ \widetilde{g_k} := \frac{1}{\sqrt{\pi}} g_k;\ \widetilde{h_k} := \frac{1}{\sqrt{\pi}},\ k \geq 1$

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx &&= \tfrac{1}{\pi}\langle f,1\rangle = \tfrac{1}{\pi}\langle f,g_0\rangle \\ a_k &= \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx &&= \tfrac{1}{\pi}\langle f,g_k\rangle \\ b_k &= \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx &&= \tfrac{1}{\pi}\langle f,h_k\rangle \qquad k\geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k\cos kx + b_k \sin kx) \\ F_n &= \frac{1}{2\pi}\langle f,g_0\rangle + \sum_{k=1}^n\left(\frac{1}{\pi}\langle f,g_k\rangle g_k + \frac{1}{\pi}\langle f,h_k\rangle h_k\right) \\ &= \langle f,\widetilde{g_0}\rangle\widetilde{g_0} + \sum_{k=1}^n\left(\langle f,\widetilde{g_k}\rangle\widetilde{g_k} + \langle f,\widetilde{h_k}\rangle\widetilde{h_k}\right) \end{aligned}$$

Verallgemeinerung

$$\begin{aligned} \Big(\mathcal{L}^2([a,b]),\langle . \rangle\Big) &\rightsquigarrow \Big(V,\langle . \rangle\Big),\ V \text{ Prähilbertraum} \\ f,g\in\mathcal{L}^2([a,b]) &\rightsquigarrow u,v,\ldots\in V \\ \widetilde{g_k},\widetilde{f_k} &\rightsquigarrow \text{ON-System } a_1,a_2,\ldots\in V, \langle a_k,a_l\rangle = \boldsymbol{\delta}_{kl} \end{aligned}$$

G[1.2] Lemma

1. Ist $a_1,\ldots,a_n$ Basis von V, so gilt $\forall\, v\in V$

$$v = \sum_{j=1}^n \langle v,a_j\rangle a_j \tag{1.5}$$

Orthogonal-Entwicklung

2. Sei $U = \mathrm{sp}(a_1,\ldots,a_k)$. Dann exisitiert zu jedem $v\in V$ genau ein $v^*\in U$ mit $v-v^*\in U^\perp$, nämlich

$$v^* = \sum_{j=1}^k \langle v,a_j\rangle a_j \tag{1.6}$$

Beweis

1. Wegen Basis gilt $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j a_i$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle v,a_k\rangle &= \langle \textstyle\sum_{k=1}^n \lambda_j a_j, a_k\rangle \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^n \lambda_j \underbrace{\langle a_j,a_k\rangle}_{\boldsymbol{\delta}_{jk}} \\ &= \lambda_k \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow v = \sum_{j=1}^n \langle v,a_j\rangle a_j$$

2. Ansatz: $v^* = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$

$$\begin{aligned}
v - v^* \in U^\perp \quad &\iff \quad \langle v - v^*, a_j\rangle = 0 \\
&\iff \quad \langle v, a_j\rangle - \langle v^*, a_j\rangle = 0 \\
&\iff \quad \langle v, a_j\rangle = \underbrace{\langle v^*, a_j\rangle}_{\lambda_j}, \qquad\qquad j = 1, \ldots, k \\
&\iff \quad v^* = \sum_{i=1}^{k} \langle v, a_j\rangle a_j
\end{aligned}$$

■

H[1.2] Lemma

Ist U Untervektorraum von V, $\dim U < \infty$, so gilt:

1. $U \oplus U^\perp = V$
2. $U = \left(U^\perp\right)^\perp =: U^{\perp\perp}$

Beweis

zu 1. $v \in V$. $\quad v = \underbrace{v^*}_{\in U} + \underbrace{(v - v^*)}_{\in U^\perp} \quad \Rightarrow V = U + U^\perp$

$U \cap U^\perp = \{0\} \Rightarrow V = U \oplus U^\perp$.

zu 2. „$\subseteq$“: $U \subseteq U^{\perp\perp}$

$U^{\perp\perp} = \left\{w \in V \;:\; \langle w, u\rangle = 0 \,\forall\, u \in U^\perp\right\}$. $v \in U$ erfüllt diese Bedingung: $\langle v, u\rangle = 0 \,\forall\, u \in U^\perp \Rightarrow v \in U^{\perp\perp}$.

„$\supseteq$“: $U^{\perp\perp} \subseteq U$

$v \in U^{\perp\perp} \Rightarrow v = v_1 + v_2,\ v_1 \in U, v_2 \in U^\perp$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \langle v, v_2\rangle \quad &= \quad \langle v_1 + v_2, v_2\rangle \\
&= \quad 0 + \langle v_2, v_2\rangle
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \langle v_2, v_2\rangle = 0 \Rightarrow v_2 = 0 \Rightarrow v = v_1 \in U$. ■

$V = U \oplus U^\perp$ Orthogonalzerlegung von V. $U^\perp$ orth. Komplement von U.

$$P_1 : \begin{array}{l} V \to U \\ v \mapsto v_1 \end{array} \quad \Bigg| \quad P_2 : \begin{array}{l} V \to U^\perp \\ v \mapsto v_2 \end{array}$$

sind die senkrechten Projetionen. Es gilt $v = P_1 v + P_2 v \quad \forall\, v \in V$.

Hinweis

Ist $U = \mathrm{sp}(a_1, \ldots, a_k)$ ein ON-System (=Orthonormalsystem), so gilt:

$$\begin{aligned}
P_1 v \quad &= \quad v^* = \sum_{j=1}^{k} \langle a_j, v\rangle a_j \\
P_2 v \quad &= \quad v - v^* = v - P_1 v = v - \sum_{j=1}^{k} \langle a_j, v\rangle a_j
\end{aligned}$$

I[1.2] Lemma

Gilt die Orthogonalzerlegung $V = U \oplus U^\perp$, so gilt $\forall\, v \in V,\ u \in U$:

$$\boxed{|v-u|^2 \geq |v - P_1 v|^2 = |P_2 v|^2 = |v|^2 - |P_1 v|^2} \tag{1.7}$$

mit „=“ genau für $u = P_1 v$.
D.h. $P_1 v$ ist in U die beste Approxiomation an v.

Beweis

$$\begin{aligned} v-u &= P_1 v + P_2 v - u \\ &= \underbrace{P_2 v}_{\in U^\perp} + \underbrace{P_1 v - u}_{\in U} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |v-u|^2 &= |P_2 v|^2 + |P_1 v - u|^2 \\ &\geq |P_2 v|^2 \\ &= |v - P_1 v|^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow |P_1 v|^2 + |P_2 v|^2 = |v|^2$

„=“ $\Leftrightarrow |P_1 v - u|^2 = 0 \Leftrightarrow P_1 v = u$. ■

Abstrakte Fourier-Entwicklung

Sei $(a_j)_{j \in N}$ ein ON-System in V, $N = \{1, \ldots, n\}$ oder $N = \mathbb{N}$. Man nähere ein beliebiges $v \in V$ „möglichst gut“ durch endliche Linearkombinationen $\sum_{j=1}^{k} \xi_j a_j$ an mit $k \in N$ fest.
Diese Frage wird durch Lemma I[1.2] beantwortet:

$$U := \operatorname{sp}(a_1, \ldots, a_k)$$

Dann gilt:

$$\left| v - \sum_{j=1}^{k} \xi_j a_j \right|^2 \geq \left| v - \sum_{j=1}^{k} \langle v, a_j \rangle a_j \right|^2 = |v|^2 - \sum_{j=1}^{k} \langle v, a_j \rangle^2 \geq 0$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $\xi_j = \langle v, a_j \rangle \quad \forall\, j = 1, \ldots, k$.
Beste Approximation, falls $\xi_j = \langle v, a_j \rangle =$ Fourier-Koeffizienten

$$|v|^2 \geq \sum_{j=1}^{k} \langle v, a_j \rangle^2 \quad \forall\, v \in V,\ k \in N$$

J[1.2] Folgerung

Für jedes abzählbar unendliche ON-System $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in V und jedes $v \in V$ gilt:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{\infty} \langle v, a_j \rangle^2 \leq |v|^2} \tag{1.8}$$

Bessel'sche Ungleichung

Insbesondere gilt: $\lim_{j\to\infty} \langle v, a_j \rangle = 0$

Einschub/Anmerkung:

$$\boxed{\begin{aligned} f \in \mathcal{L}^2([0;2\pi]) \quad &\Rightarrow \int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x \to 0 \ (k\to\infty) \\ &\Rightarrow \int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x \to 0 \ (k\to\infty) \end{aligned}}$$

K[1.2] Satz und Definition

Sei V ein reeller Prähilbertraum mit $\dim V = \infty$ und $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein ON-System in V. Dann sind äquivalent:

(i) Die Menge der Linearkombinationen der a_k ist <u>dicht</u> in V. Man sagt: $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist <u>total</u> in V.

(ii) $\forall\, v \in V: \quad v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, a_k \rangle a_k$

(iii) $\forall\, v \in V: \quad |v|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, a_k \rangle^2$ (Parseval'sche Gleichung)

(iv) $\forall\, v, w \in V: \quad \langle v, w \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, a_k \rangle \cdot \langle w, a_k \rangle$ (verallg. Parseval'sche Gleichgung)

Aus (iii) folgt:

(v) $v \in V$, $\langle v, a_k \rangle = 0\ \forall\, k \in \mathbb{N} \Rightarrow v = 0$. Man sagt: $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist <u>maximal</u> in V.

Beweis

Sei $S_n = \sum_{k=1}^{n} \langle v, a_k \rangle a_k$ für $v \in V$ jeweils:

(i)⇒(ii) Wir wissen für $v \in V$ und jede Linearkombination u von $a_1, \ldots, a_n$ gilt:

$$|v-u| \geq |v-S_n|$$

Gegeben sei $\varepsilon > 0$; wähle laut (i) n und u so, dass $|v-u| < \varepsilon$ (←Dichtheit!). Dann: $|v-S_n| < \varepsilon$. Weiter gilt $|v-S_n| \geq |v-S_m| \quad \forall\, m > n$, da S_n Linearkombination von $a_1, \ldots, a_m$, also erst recht von $a_1, \ldots, a_n, \ldots, a_m$ ist. Also:

$$|v-S_m| < \varepsilon \quad \forall\, m > n$$

Also: $v = \lim\limits_{m\to\infty} S_m$

(ii) ⇒ (i) Aus $S_n \to v$ folgt (i), da S_n Linearkombination von $a_1, \ldots, a_n$ ist.

(ii) ⇔ (iii) $|v-S_n|^2 = |v|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} \langle v, a_k\rangle^2$

(iii) ⇒ (iv)

$$\begin{aligned} \langle v, w\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, a_k\rangle a_k, w \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, a_k\rangle \cdot \langle a_k, w\rangle \end{aligned}$$

(iv) ⇒ (iii) Setze $v = w$.

(iii) ⇒ (v) Klar. ■

L[1.2] Lemma

Ist V Hilbertraum mit obigen Eigenschaften, so ist für jedes $v \in V$ die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle v, a_k\rangle a_k$ konvergent.

Beweis

Wende das *Cauchy-Kriterium* an: $\sum\limits_{k=n}^{m} \langle v, a_k\rangle a_k$ muss klein gemacht werden. Laut Pythagoras gilt:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} \langle v, a_k\rangle a_k\right|^2 = \sum_{k=n}^{m} \langle v, a_k\rangle^2$$

für $m > n$. Da $\sum_{k=1}^{\infty} \langle v, a_k\rangle^2$ konvergiert (Bessel-Ungleichung), folgt:

zu $\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \sum\limits_{k=n}^{m} \langle v, a_k\rangle^2 < \varepsilon^2 \quad \forall\, m, n > N$.

Dann folgt:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} \langle v, a_k\rangle a_k\right|^2 < \varepsilon^2 \quad \forall\, m, n > N.$$

Somit wegen der Vollständigkeit von V ist

$$\widetilde{v} := \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, a_k\rangle a_k$$

konvergent in V. ■

M[1.2] Zusatz (zu K[1.2])

Ist V Hilbertraum, so sind alle fünf Punkte aus K[1.2] äquivalent.

Beweis

(v) $\Rightarrow$ (ii) Zu $v \in V$ bilde man $\widetilde{v} := \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, a_k \rangle a_k$.

Dann:

$$\begin{aligned}
\langle v - \widetilde{v}, a_\ell \rangle &= \langle v, a_\ell \rangle - \langle \widetilde{v}, a_\ell \rangle \\
&= \langle v, a_\ell \rangle - \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, a_k \rangle \cdot \underbrace{\langle a_k, a_\ell \rangle}_{\delta_{k\ell}} \\
&= \langle v, a_\ell \rangle - \langle v, a_\ell \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\overset{(v)}{\Longrightarrow} v - \widetilde{v} = 0 \Leftrightarrow v = \widetilde{v}$ ■

Zurück zur „konkreten“ Fourier-Entwicklung:
$f \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi])$:

$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$	trig. Polynom
$F_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$	Fourier-Polynom

N[1.2] Folgerung

Für $f \in \mathcal{L}^2([0; 2\pi])$ gilt:

(i) $\|f - T_n\|^2 \geq \|f - F_n\|^2$, wobei Gleichheit $\Leftrightarrow T_n = F_n \Leftrightarrow \alpha_k = a_k,\ \beta_k = b_k\ \forall\, k = 0, \ldots, n$. Also: F_n *ist Bestapproximation in der 2-Norm unter allen* T_n.

(ii)

$$\begin{aligned}
0 \leq \|f - F_n\|^2 &= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} \left(\langle f, \widetilde{g}_k \rangle^2 + \langle f, \widetilde{h}_k \rangle^2 \right) \\
&= \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x - \frac{\pi}{2} {a_0}^2 - \pi \sum_{k=1}^{n} ({a_k}^2 + {b_k}^2)
\end{aligned}$$

($\widetilde{g}_k$, $\widetilde{h}_k$ $\rightsquigarrow$ F[1.2])

(iii) $\frac{1}{2} {a_0}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} ({a_k}^2 + {b_k}^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x$ (*Bessel-Ungleichung*)

(iv) $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0.$

Beweis

Klar aus der abstrakten Theorie. ■

O[1.2] Satz

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ r-mal stetig differenzierbar, so gilt sogar:

$$\lim_{k\to\infty} k^r a_k = \lim_{k\to\infty} k^r b_k = 0,$$

d.h. $a_k = \mathbf{o}\left(\frac{1}{k^r}\right)$, $b_k = \mathbf{o}\left(\frac{1}{k^r}\right)$.

Beweis

Produktintegration! zunächst $\underline{r=1}$
f habe Fourier-Koeffizienten a_k, b_k; f' die Fourier-Koeffizienten A_k, B_k.

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos kx \,\mathrm{d}x \qquad \longrightarrow 0 \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{f(x)\cdot \cos kx\Big|_0^{2\pi}}_{=0} + k\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{\pi}k\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x \\ &= k\,b_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_k &= \ldots \\ &= -k\,a_k \end{aligned}$$

$\underbrace{A_k}_{k\,b_k} \longrightarrow 0$, $\underbrace{B_k}_{-k\,a_k} \longrightarrow 0$.
Vollständige Induktion nach r liefert das Ergebnis. ∎

P[1.2] Satz von Riemann und Lebesgue

Für $f \in \mathcal{L}^2([a,b])$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = 0$$
$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x = 0$$

Beweis

Für $a = 0, b = 2\pi$ ist die Aussage die aus N[1.2].(iv). Sonst mache Zerlegung des Intervalls $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ mit $x_j - x_{j-1} \le 2\pi$ und wende N[1.2].(iv) an auf die Nullfortsetzung von $f\big|_{[x_{j-1},x_j]}$.
Dann: $\displaystyle\int_a^b f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{N}\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x \xrightarrow{k\to\infty} 0.$ ∎

1.3 Punktweise Konvergenz

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch.

A[1.3] Umformung der Teilsummen $F_n(x)$

Sei f über $[0; 2\pi]$ integrierbar.

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\underbrace{(\cos kt\cdot\cos kx + \sin kt\cdot\sin kt)}_{=\cos(kt-kx)}\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt-kx)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\,\mathrm{d}t \\
&\underset{\tau=\frac{t-x}{2}}{=\!=} \frac{1}{\pi}\int_{\frac{-\pi}{2}-\frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}} f(x+2\tau)\frac{\sin(2n+1)\tau}{\sin\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&\underset{\text{periodisch}}{=\!=} \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+2\tau)\frac{\sin(2n+1)\tau}{\sin\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x+2\tau)\frac{\sin(2n+1)\tau}{\sin\tau}\,\mathrm{d}\tau\ + \right. \\
&\quad \left. + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x+2\tau)\frac{\sin(2n+1)\tau}{\sin\tau}\,\mathrm{d}\tau\right)
\end{aligned}$$

Mit der Rücksubstitution $\tau = -t$ für das erste Integral und $\tau = t$ für das zweite und unter Berücksichtigung der Grenzen der Integrale erhält man:

$$\boxed{F_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}\,\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t} \tag{1.9}$$

Dirichlet-Integral

Spezialisiere $f(x) = c = \text{const.} \Rightarrow F_n(x) = c \quad \left(\frac{a_0}{2} = c\right)$.

Mit Gleichung (1.9) folgt dann: $c = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} c\cdot\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$

Subtraktion mit (1.9):

$$\boxed{F_n(x) - c = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2} - c\right)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t} \quad \forall c \in \mathbb{R} \tag{1.10}$$

B[1.3] Satz

Sei f über $[0; 2\pi]$ quadratisch integrierbar. Notwendig und hinreichend dafür, dass die Fourierreihe von f an der Stelle x gegen $c \in \mathbb{R}$ konvergiert, ist jede der drei folgenden Bedingungen:

(i)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}-c\right)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t=0$$

(ii) Nach Wahl eines beliebigen $\delta\in]0;\frac{\pi}{2}]$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\left(\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}-c\right)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t=0$$

(iii) Nach Wahl eines beliebigen $\delta\in]0;\frac{\pi}{2}]$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\left(\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}-c\right)\frac{\sin(2n+1)t}{t}\,\mathrm{d}t=0$$

Beweis

Definiere $\boxed{\varphi_c(t,x):=\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}-c}$

- $t\mapsto\varphi_c(t,x)$ ist in $\mathcal{L}^2[0;\frac{\pi}{2}]$ (Linearkombination)
- $t\mapsto\varphi_c(t,x)\cdot\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\in\mathcal{L}^2[0;\frac{\pi}{2}]$, da der zweite Faktor in $]0;\frac{\pi}{2}]$ stetig ist und in $t=0$ eine hebbare Unstetigkeit hat:
$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}=2n+1$$

Zur Äquivalenz: $\quad F_n(x)\longrightarrow c \quad\Leftrightarrow$ (i) klar aus (1.10).

(i) $\Leftrightarrow$ (ii)

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi_c(t,x)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\delta}\varphi_c(t,x)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t+\int\limits_{\delta}^{\frac{\pi}{2}}\varphi_c(t,x)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$$

$t\mapsto\frac{\varphi_c(t,x)}{\sin t}\in\mathcal{L}^2[\delta;\frac{\pi}{2}]$, da $\frac{1}{\sin t}$ in $[\delta;\frac{\pi}{2}]$ stetig und beschränkt.

Also:

$$\lim_{n\to\infty}\int_\delta^{\frac{\pi}{2}}\varphi_c(t,x)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t=0,$$

also äquivalent zu $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi_c(t,x)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ ist $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\varphi_c(t,x)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii)

$$\int_0^{\delta}\varphi_c(t,x)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t-\int_0^{\delta}\varphi_c(t,x)\frac{\sin(2n+1)t}{t}\,\mathrm{d}t=$$
$$\int_0^{\delta}\varphi_c(t,x)\left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right)\sin(2n+1)t\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right) &= \lim_{t\to\infty}\frac{t-\sin t}{t\cdot\sin t}\\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{t-\left(t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-+\dots\right)}{t^2\left(1-\frac{t^2}{3!}+\frac{t^4}{5!}-+\dots\right)}\\ &= 0\end{aligned}$$

Somit folgt die Behauptung mit dem Lemma von Riemann und Lebesgue. ■

C[1.3] Lokalisationssatz von Riemann

Das Konvergenzverhalten einer Fourierreihe an der Stelle x hängt nur von den Werten von f in einer beliebig kleinen Umgebung von x ab. ■

D[1.3] Lemma

Eine Funktion $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ erfülle

(i) ψ ist über jedes Intervall $[\alpha, b]$ mit $a < \alpha < b$ integrierbar.

(ii) $\exists\, g \in \mathcal{L}^1[a,b]$ mit $|\psi(t)| \leq g(t)$ für $a \leq t \leq b \Rightarrow \psi \in \mathcal{L}^1[a,b]$

Beweis

Mittels...

Ausschöpfungssatz(*Walter, H[11.6]*)

$M \subseteq \mathbb{R},\ f : M \to \mathbb{R}$

$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M, \quad M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$

$f\big|_{M_k} \in \mathcal{L}^1,\ \int_{M_k} |f|$ beschränkt $\forall\, k$

$\Rightarrow\ f \in \mathcal{L}^1$

zum Obigen: Nehme $(\alpha_k) \downarrow a$ (z.B. $\alpha_k = a + \frac{1}{k}$):

$$\int_{\alpha_k}^{b} |\psi(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_{\alpha_k}^{b} g(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{a}^{b} g(t)\,\mathrm{d}t$$

■

E[1.3] Satz

Sei $f \in \mathcal{L}^2[0;2\pi]$. Hinreichend dafür, dass die Fourierreihe von f an der Stelle x gegen $c \in \mathbb{R}$ konvergiert, ist jede der folgenden Bedingungen:

(i) Die Funktion $t \mapsto \frac{\varphi_c(t,x)}{t}$ ist auf $[0;\delta]$ mit $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$ quadratisch integrierbar.

(ii) Die Funktion $t \mapsto \frac{\varphi_c(t,x)}{t}$ ist auf $[0;\delta]$ mit $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$ beschränkt.

(iii) $\exists \lim_{t\to 0+} \frac{\varphi_c(t,x)}{t} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{\varphi_c(t,x)}{t} \in \mathbb{R}$

Beweis

Aus (i) folgt Konvergenz: Klar aus B[1.3].(iii) und P[1.2].

(ii) ⇒ (i): Setze $\psi(t) := \frac{\varphi_c(t,x)}{t}$ für $0 < t \leq \delta$, $\psi(0) = 0$. ψ über jedes Intervall $[\delta_1;\delta]$ mit $0 < \delta_1 \leq \delta$ quadratisch integrierbar. Nach Voraussetzung existiert ein $K \geq 0$ mit $|\psi(t)| \leq K$ bzw. $|\psi(t)|^2 \leq K^2$ auf $]0;\delta]$. Somit ist D[1.3] anwendbar mit $g(t) := K$ bzw. $g(t) := K^2$. Also ist ψ über $[0;\delta]$ quadratisch integrierbar.

(iii) ⇒ (ii) Existenz des Limes impliziert Beschränktheit nahe Null. ■

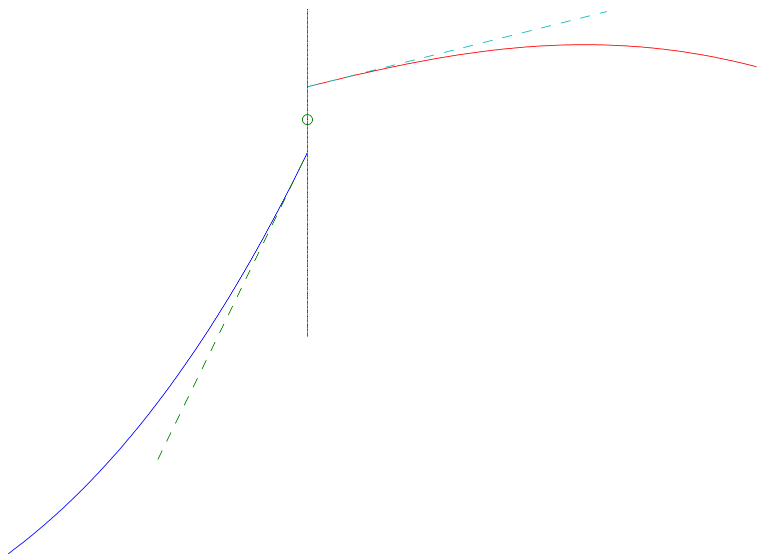


Abbildung 1.2: Der Funktionswert, gegen den die Fourierreihe konvergiert, ist das arithmetische Mittel des rechts- und linksseitigen Limes.

F[1.3] Standarddarstellungssatz

Sei f über $[0;2\pi]$ quadratisch integrierbar. Existieren für x die vier einseitigen Grenzwerte

- $\lim\limits_{h\downarrow 0} f(x \pm h) =: f_\pm(x) \quad \in \mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{h\downarrow 0} \dfrac{f(x\pm h) - f_\pm(x)}{\pm h} \quad \in \mathbb{R}$,

so konvergiert die Fourierreihe f an der Stelle x gegen

$$\frac{f_+(x) + f_-(x)}{2}$$

Beweis

Verwende E[1.3].(iii) mit $c := \frac{f_+(x)+f_-(x)}{2}$

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_c(t,x)}{t} &= \frac{1}{t}\left(\frac{f(x+2t)+f(x-2t)-f_+(x)-f_-(x)}{2}\right)\\ &= \underbrace{\frac{f(x+2t)-f_+(x)}{2t} - \frac{f(x-2t)-f_-(x)}{-2t}}_{\text{Einzelne Limites existieren nach Voraussetzung,}}\end{aligned}$$

also auch

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi_c(t,x)}{t} \in \mathbb{R}$$

■

G[1.3] Satz

Ist $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, so konvergiert die Fourierreihe von f in $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen f.

Beweis

Punktweise Konvergenz: Klar aus F[1.3].

Gleichmäßige Konvergenz: Aus O[1.2]! Danach gilt $k^2\, a_k \longrightarrow 0,\ k^2\, b_k \longrightarrow 0$, also $|k^2\, a_k| \leq \gamma,\ |k^2\, b_k| \leq \gamma$ für eine Konstante γ. Also $|a_k| \leq \frac{\gamma}{k^2},\ |b_k| \leq \frac{\gamma}{k^2}$, also hat die Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

die Majorante

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\gamma}{k^2} = 2\gamma \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

■

$a_1, a_2, \ldots$ ON in Prähilbertraum V
maximal : $\langle v, a_k\rangle = 0\ \forall\, k = 1, 2, \ldots \Rightarrow v = 0$
total: Menge der Linearkombinationen von endlich vielen a_k dicht in V

1.4 Maximalität der harmonischen Grundfunktionen

Man muss $\|f - T_n\|_2$ „klein kriegen“.

A[1.4] Definition und Lemma

Sei $A \subseteq \mathbb{R},\ f : A \to \mathbb{R}$ gegeben. Die positiven und negativen Anteile von f sind $f^+ : A \to \mathbb{R}$, $f^- : A \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \qquad f^-(x) = \min\{f(x), 0\}$$

Es gilt:

(i) $f = f^+ + f^-$

(ii) f integrierbar $\Leftrightarrow f^+,\ f^-$ integrierbar

Beweis

zu (i) Schreibe $f^+(x) = \frac{1}{2}\,(f(x) + |f(x)|),\ f^-(x) = \frac{1}{2}\,(f(x) - |f(x)|)$.

zu (ii) klar, da mit f auch $|f|$ integrierbar. ■

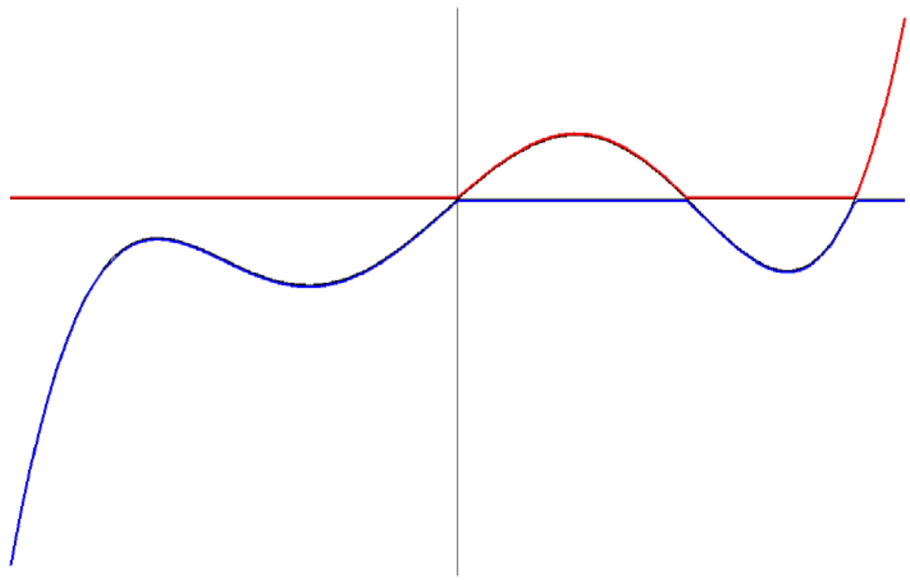


Abbildung 1.3: f mit f^+ und f^-

B[1.4] Lemma

(i) $f \in \mathcal{L}^2[a,b] \Rightarrow f \in \mathcal{L}^1[a,b]$

(ii) $f \in \mathcal{L}^1[a,b]$, f beschränkt $\Rightarrow f \in \mathcal{L}^2[a,b]$

Beweis

zu (i) klar aus Definition A[1.2]

zu (ii) Aus $|f|^2 = f \cdot f$ und dem Produktsatz[2] folgt die Behauptung.

C[1.4] Satz

$\mathcal{C}[a,b]$ ist dicht in $\mathcal{L}^2[a,b]$, d.h. zu jedem $f \in \mathcal{L}^2[a,b]$ und jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine stetige Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$\|f - g\|_2 < \varepsilon.$$

$$\Big|\ K_1^0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ :\ f \text{ stetig mit kompaktem Träger}\}$$

Beweis

O.B.d.A. $f \geq 0$ (laut A[1.4])

1. **Approximation von „$\mathcal{L}^2$" durch „beschränkt $\mathcal{L}^2$"**
   Definiere eine Funktionenfolge $(f_k) : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch „Abschneiden nach oben":

$$f_k := \min\{f(x), k\} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

   Dann gilt:

   - $\boxed{f_k \in \mathcal{L}^1[a,b]}$: klar, da Minimum mittels $|\,.\,|$ ausdrückbar;
   - $\boxed{f_k \in \mathcal{L}^2[a,b]}$: klar aus B[1.4], da f_k beschränkt;

[2] $f \in \mathcal{L}^1$, $g \in \mathcal{L}^1$ und beschränkt $\quad\Rightarrow\quad f \cdot g \in \mathcal{L}^1$

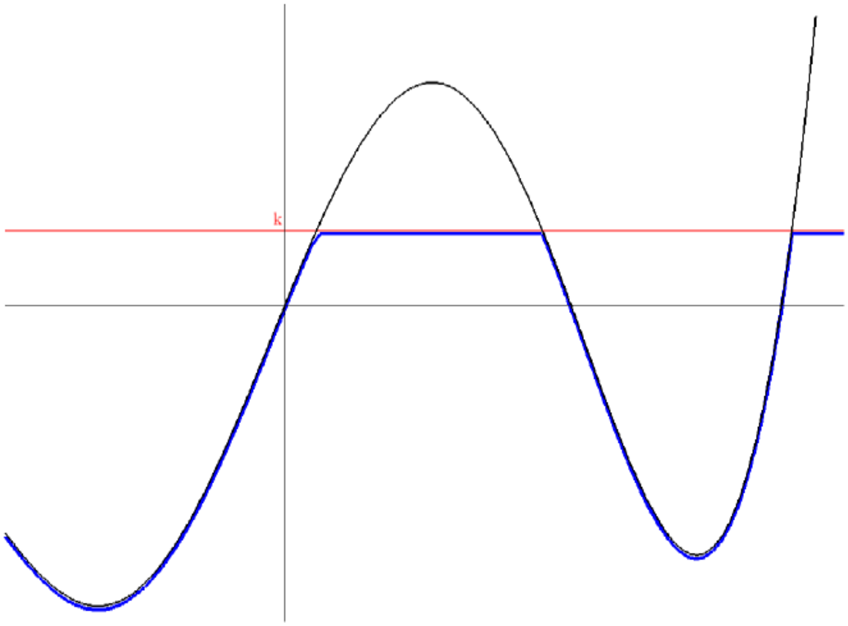


Abbildung 1.4: f und f_k

- $\boxed{f_k(x) \leq f_{k+1}(x)}$: klar, da $\min\{f(x), k\} \leq \min\{f(x), k+1\}$;
- $\boxed{\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)}$: Für $k > f(x)$ gilt $f_k(x) = f(x)$

Also konvergiert die Reihe $f_k \geq 0$ monoton wachsend gegen $f \geq 0$. Also:

$$0 \leq f - f_k \leq f,$$

also: $|f - f_k|^2 \leq |f|^2$ und nach majorisierter Konvergenz

$$\int_a^b |f - f_k|^2 \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

also

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_2 = 0.$$

Wähle k so, dass

$$\|f - f_k\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.11}$$

gilt.

2. **Approximation von „beschränkt $\mathcal{L}^2$“ durch „stetig“**

   Es existiert ein $g_0 \in K_1^0(\mathbb{R})$ mit

   $$\|\hat{f}_j - g_0\|_1 < \frac{\varepsilon^2}{4k},$$

   wobei $\hat{f}_k$ die Nullfortsetzung von f_k ist.
   Mit $g_1 := g_0\big|_{[a,b]} \in \mathcal{C}^0[a,b]$ gilt erst recht

   $$\|f_k - g_1\|_1 < \frac{\varepsilon^2}{4k}$$

Schneide auch g_1 ab, so dass es in den obigen Streifen passt, d.h. $g := \min\{g_1^+, k\} = \min\left\{\max\{g_1, 0\}, k\right\}$ stetig. Dann:

$$|f_k - g| \leq |f_k - g_1|$$

Da $0 \leq f_k \leq k$ und $0 \leq g(x) \leq k$ ist, ist

$$\begin{aligned} |f_k - g| &\leq k \\ \Rightarrow |f_k - g|^2 &\leq k \cdot |f_k - g| \\ &\leq k \cdot |f_k - g_1|, \end{aligned}$$

also durch Integration

$$\begin{aligned} \|f_k - g\|_2^2 &\leq k\,\|f_k - g_1\|_1 \\ &< k \cdot \frac{\varepsilon^2}{4} = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\|f_k - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.12}$$

Aus (1.11) und (1.12) folgt per Dreiecksungleichung die Behauptung

$$\|f - g\|_2 < \varepsilon$$

■

D[1.4] Satz

Der Untervektorraum der $f \in \mathcal{C}[a,b]$ mit $f(a) = f(b)$ ist $\mathcal{L}^2$-dicht in $\mathcal{C}[a,b]$, also nach C[1.4] in $\mathcal{L}^2[a,b]$.

Beweis

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $\varepsilon > 0$. Sei $|f| \leq M$ auf $[a,b]$ mit $M > 0$. Wähle $\beta \in [a,b]$ und ersetze f auf $[\beta, b]$ durch die affine Funktion φ mit $\varphi(\beta) = f(\beta), \varphi(b) = f(a)$. Dann erhält man stetiges f_1 mit

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in [a, \beta] \\ \varphi(x) & \text{für } x \in [\beta, b] \end{cases}$$

mit $f_1(a) = f_1(b)$.
Dann gilt auf $[\beta, b]$: $-M \leq \varphi \leq M$, also $|\varphi| \leq M$

$$\begin{aligned} \int_a^b |f - f_1|^2 &= \int_\beta^b |f - \varphi|^2 \\ &\leq \int_\beta^b 2\left(|f|^2 + |\varphi|^2\right) \\ &\leq (4M^2) \cdot (b - \beta) \end{aligned}$$

Falls $4M^2(b-\beta) < \varepsilon^2$, so $\|f - f_1\| < \varepsilon$. Dies ist erfüllt, falls $b - \beta < \frac{\varepsilon^2}{4M^2}$. ■

$$\mathcal{L}^2[a,b] \underset{\text{dicht},\|.\|_2}{\overset{\text{D[1.4]}}{\supseteq}} \mathcal{C}[a,b] \underset{\text{dicht},\|.\|_2}{\overset{\text{C[1.4]}}{\supseteq}} \mathcal{C}_p[a,b] \underset{\text{dicht},\|.\|_2,\|.\|_\infty}{\overset{\text{E[1.4]}}{\supseteq}} \overset{\text{hier:}[a,b]=[0,2\pi]}{\mathcal{F}[0,2\pi]}$$

mit $\mathcal{C}_p[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \,:\, f \text{ stetig}, f(a) = f(b)\}$ und $\mathcal{F}[0,2\pi]$ =Vektorraum aller trigonometrischen Polynome

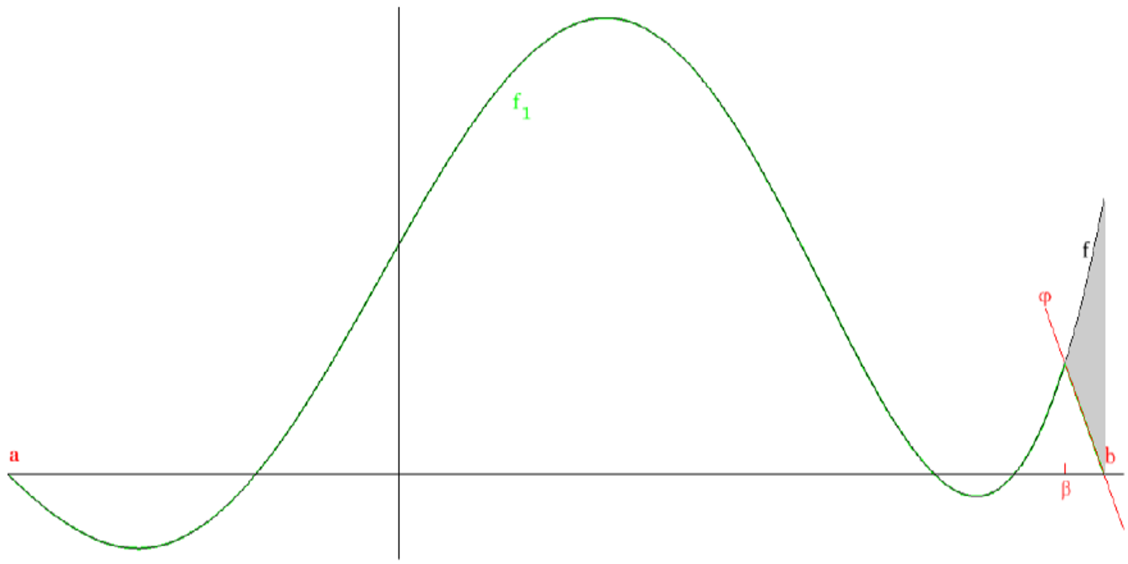


Abbildung 1.5: f, φ, f_1 und die Fläche, die „verloren geht“. Die Fläche geht für $\beta \to b$ offensichtlich gegen 0.

E[1.4] Satz

Zu jeder stetigen 2π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein trigonometrisches Polynom T_n, so dass

$$\|f - T_n\|_\infty < \varepsilon$$

und damit für die 2-Norm auf $[0, 2\pi]$

$$\|f - T_n\|_2 < \sqrt{2\pi} \cdot \varepsilon$$

Aus: Walter, Analysis III, A[6.2]:
Wir betrachten einen *kompakten metrischen* Raum K und dazu eine Menge $\mathcal{C}^0(K)$ der *stetigen reellen* Funktionen $F : K \to \mathbb{R}$. Dieser Funktionenraum wird mit der *Maximumsnorm* versehen:

$$\|f\|_\infty := \max_{p \in K} |f(p)|.$$

Der zugehörige Konvergenzbegriff für Funktionenfolgen ist die *gleichmäßige* Konvergenz. Wir bezeichnen diesen Raum mit *dieser* Norm genauer als $\mathcal{C}^0_\infty(K)$. Es ist ein normierter $\mathbb{R}$- Vektorraum, ja sogar ein Banach-Raum, was aber hier nicht benötigt wird.

A. Satz (Approximationssatz von Stone/Weierstrass)
Gegeben sei ein kompakter metrischer Raum K und eine Teilmenge A des Funktionenraums $\mathcal{C}^0_\infty(K)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $f, g \in A \Rightarrow f + g, f \cdot g \in A$.

(ii) Jede konstante Funktion gehört zu A.

(iii) A **trennt Punkte**, d.h. für alle $p \neq q$ in K existiert ein $f \in A$ mit $f(p) \neq f(q)$.

Dann ist A dicht in $\mathcal{C}^0_\infty(K)$, d.h. $\overline{A} = \mathcal{C}^0_\infty(K)$. Anders ausgedrückt: Zu jeder stetigen Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ existiert eine Folge (f_k) in A, die in K gleichmäßig gegen f konvergiert.
(Äquivalente Formulierung bei *Dieudonné*: Foundations of Modern Analysis I, S. 137)

$\widetilde{f} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ besitzt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (periodisch, Periode 2π) durch ($e^{it} \in \mathbb{S}^1$):

$$f(t) := \widetilde{f}\left(e^{it}\right)$$

$f \leftrightarrow \widetilde{f}$ bijektiv: $\|f\|_\infty = \|\widetilde{f}\|_\infty$
$\underline{\widetilde{f} \text{ stetig} \Rightarrow f \text{ stetig}}$: $E(t) := e^{it},\ E : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1,\ f = \widetilde{f} \circ E$
$\underline{f \text{ stetig} \Rightarrow \widetilde{f} \text{ stetig}}$:$E\left|_{]a;a+2\pi[}\right. : \underbrace{]a; a + 2\pi[}_{J_a} \to \mathbb{S}^1 \setminus \{e^{ia}\}$ bijektiv, homöomorph. Ferner:

$$f\,|_{J_a} = \widetilde{f} \circ E\,|_{J_a} = \widetilde{f}\,\big|_{\mathbb{S}^1 \setminus \{e^{it}\}} \circ \underbrace{E\,|_{J_a}}_{=:h_a}$$

$\Rightarrow f\,|_{J_a} \circ {h_a}^{-1} = \widetilde{f}\,\big|_{\mathbb{S}^1 \setminus \{e^{it}\}} \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}$
$\Longrightarrow f$ stetig $\Rightarrow \widetilde{f}$ stetig

---

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi \Rightarrow e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt$. Definiere $z := e^{it} \Rightarrow z^k\,|_{\mathbb{S}^1} = \cos kt + i \sin kt$

f		$\widetilde{f}$
$\cos kt$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{Re}\left(z^k\,\vert_{\mathbb{S}^1}\right)$
$\sin kt$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{Im}\left(z^k\,\vert_{\mathbb{S}^1}\right)$

Beweis (zu E[1.4])

Dies läuft mittels des Approximationssatz von Stone/Weierstrass. Die stetigen, 2π-periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind identifizierbar mit den stetigen Funktionen $\widetilde{f} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ unter Erhaltung der Maximumsnormen.

$M := \mathbb{S}^1$ ist kompakt, $A :=$ Menge der Polynome in $\mathbf{Re}\, z^k |_{\mathbb{S}^1}$, $\mathbf{Im}\, z^k |_{\mathbb{S}^1}$. Dann sind (i) - (iii) von Weiterstrass erfüllt:

(i) Bei „+“ klar, „·“ aus trigonomischen Formeln

(ii) klar: $k = 0$

(iii) A trennt Punkte schon für $k = 1$: $p \neq q \in \mathbb{S}^1 : p = e^{it}, q = e^{is} \Rightarrow e^{it} \neq e^{is}$, d.h. $(\cos t, \sin t) \neq (\cos s, \sin s)$. Also trennen bereits cos oder sin.

Somit ist A dicht in $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ bzgl. der Maximumsnorm, also zu stetigem $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $T_n \in A$ mit
$$\|f - T_n\|_\infty < \varepsilon.$$
Hieraus folgt
$$\begin{aligned} \|f - T_n\|_2^2 &= \int_0^{2\pi} |f - T_n|^2 \\ &\leq \int_0^{2\pi} \varepsilon^2 \\ &= \varepsilon^2 \cdot 2\pi \\ \Rightarrow \|f - T_n\|_2 &\leq \sqrt{2\pi} \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

■

Wir wissen:

- $f \in \mathcal{L}^2[0, 2\pi]$, T_n trigonometrisches Polynom, F_n Fourier-Polynom
$$\begin{aligned} \Rightarrow \|f - T_n\|_2^2 &\geq \|f - F_n\|_2^2 \\ &= \int_0^{2\pi} |f|^2 - \pi \left(\frac{1}{2} {a_0}^2 + \sum_{k=1}^{n} \left({a_k}^2 + {b_k}^2 \right) \right) \\ &\geq 0 \qquad \text{(vgl. N[1.2])} \end{aligned}$$
- $\mathcal{C}[0, 2\pi] \cap \{f \ : \ f(0) = f(2\pi)\}$ $\mathcal{L}^2$-dicht in $\mathcal{L}^2[0, 2\pi]$ (vgl. C[1.4], D[1.4])
- Trigonometrische Polynome sind $\mathcal{L}^2$-dicht in $\mathcal{C}[0, 2\pi] \cap \{f \ : \ f(0) = f(2\pi)\}$

$\Rightarrow \|f - T_n\|_2$ klein zu kriegen für große n, also auch $\|f - F_n\|_2$ klein zu kriegen für große n. Daraus folgt

F[1.4] Satz

Für jedes $f \in \mathcal{L}^2[0, 2\pi]$ gilt die *Parseval'sche Gleichung*
$$\frac{1}{2} {a_0}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left({a_k}^2 + {b_k}^2 \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2$$

Damit greifen alle Äquivalenzen aus K[1.2], insbesondere

(i) Das System der harmonischen Grundfunktionen $1, \cos kx, \sin kx$ $(k \in \mathbb{N})$ ist total, also maximal in $\mathcal{L}^2[0, 2\pi]$.

(ii) Jedes $f \in \mathcal{L}^2[0, 2\pi]$ kann beliebig genau bzgl. der $\mathcal{L}^2$-Norm durch eine Teilsumme der Fourier-Reihe approximiert werden. Diese konvergiert $\mathcal{L}^2$ gegen f.

(iii) Es gilt die *verallgemeinerte Parseval'sche Gleichung*:

$$\frac{1}{2}a_0\widetilde{a}_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\widetilde{a}_k + b_k\widetilde{b}_k\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f \cdot \widetilde{f} \quad \forall\, f, \widetilde{f} \in \mathcal{L}^2[0, 2\pi],$$

wobei a_k, b_k die Fourierkoeffizienten von f, $\widetilde{a}_k, \widetilde{b}_k$ die von $\widetilde{f}$ sind.

(iv) Gilt für ein $f \in \mathcal{L}^2[0, 2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos kx\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin kx\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

so ist $f(x) = 0$ fast überall auf $[0, 2\pi]$. Speziell ist jedes $f \in \mathcal{L}^2[0, 2\pi]$ durch seine Fourier-Koeffizienten eindeutig bestimmt. ■

G[1.4] Folgerung

Gilt für $f \in \mathcal{L}^2[a, b]$

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\, g \in \mathcal{C}[a, b],$$

so ist $f(x) = 0$ fast überall in $[a, b]$

Beweis

Falls $[a, b] = [0, 2\pi]$, so folgt dies aus F[1.4].(iv): Wähle als g speziell die harmonischen Grundfunktionen.
Falls $[a, b]$ beliebig, so transformiere auf $[0, 2\pi]$ durch Substitution

$$x = \frac{(b-a)}{2\pi}t + a$$

■

H[1.4] Nachtrag zu B[1.4]

(i) $f \in \mathcal{L}^2[a, b] \Rightarrow f \in \mathcal{L}^1[a, b]$ **und** $\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a} \cdot \|f\|_2$

Beweis (zur zweiten Aussage)

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= \int_a^b |f| \\ &= \int_a^b |f| \cdot 1 \\ &= \langle |f|, 1\rangle \\ &\underset{CSU}{\leq} \|f\|_2 \cdot \|1\|_2 \\ &= \sqrt{b-a} \cdot \|f\|_2, \end{aligned}$$

wobei $\|1\|_2^2 = \displaystyle\int_a^b 1^2 = (b-a) \cdot 1 \Rightarrow \|1\|_2 = \sqrt{b-a}$. ■

I[1.4] Satz

Sei $f \in \mathcal{L}^2[0, 2\pi]$ und $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, so gilt für $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}(\beta - \alpha) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_\alpha^\beta \cos kx\,\mathrm{d}x + b_k \int_\alpha^\beta \sin kx\,\mathrm{d}x \right),$$

einschließlich der gewöhnlichen Konvergenz der Reihe (f gegebenenfalls 2π-periodisch fortzusetzen).

Beweis

O.B.d.A. $[\alpha, \beta] = [0, 2\pi]$ (sonst Zerlegung von $[\alpha, \beta]$).

$$\begin{aligned}
\left| \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x - \int_\alpha^\beta F_n(x)\,\mathrm{d}x \right| &= \left| \int_\alpha^\beta (f(x) - F_n(x))\,\mathrm{d}x \right| \\
&\le \int_\alpha^\beta |f(x) - F_n(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\le \int_0^{2\pi} |f(x) - F_n(x)|\,\mathrm{d}x \\
&= \|f - F_n\|_1 \\
&\le \sqrt{2\pi}\,\|f - F_n\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned}$$

Also:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta \underbrace{F_n(x)}_{\substack{\text{Teilsumme der} \\ \text{fragl.Reihe}}} \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$$

■

J[1.4] Bemerkung

Sei $f \in \mathcal{L}^2[0, 2\pi]$. Nach F[1.4].(ii) gilt $F_n \longrightarrow f$ ($\mathcal{L}^2$), also nach B[1.4] auch ($\mathcal{L}^1$). Somit existiert eine Teilfolge (F_{n_k}) der Partialsummen der Fourierreihe, die fast überall gegen f konvergiert (vgl. *Walter, Analysis II, B[11.5]*)
Carleson bewies: Sogar (F_n) selbst konvergiert punktweise fast überall gegen f (vgl. *Acta mathematica 116, 1966, S. 135-157*).

Kapitel 2

Fourier-Transformation

Motivation (komplexe Variante)

periodischer Fall $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch, über $[0, 2\pi]$ $\mathcal{L}^1$-integrierbar; $f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ mit

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{int}\, \mathrm{d}t$$

nichtperiodischer Fall $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ integierbar; $f(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} c(s)\, e^{ist}\, \mathrm{d}s$ mit $c(s) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-ist}\, \mathrm{d}t$ (später andere Normierung).

2.1 Das Fourier-Integral

Gegeben: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrierbar, also $f \in \underbrace{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})}_{=:\mathcal{L}^1(\mathbb{R})}$

A[2.1] Definition

Die *Fouriertransformierte* von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist die Funktion $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-ist}\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-ist}\, \mathrm{d}t}_{\text{Fourier-Integral}} \end{aligned}$$

B[2.1] Satz

1. $\hat{f}$ ist wohldefiniert
2. $\hat{f}$ ist beschränkt
3. $\hat{f}$ ist stetig

Beweis

1. Es gilt: $|f(t)\, e^{-ist}| = |f(t)|$. Ausschöpfung: $[-k, k], k \in \mathbb{N}$. Ausschöpfungssatz $\Rightarrow$ Existenz von $\hat{f}(s)$.

2.

$$\begin{aligned} |\hat{f}(s)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \|f\|_1 \qquad \forall\, s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3. Sei $s_n \xrightarrow{n\to\infty} s \overset{\text{z.zg}}{\Longrightarrow} \hat{f}(s_n) \longrightarrow \hat{f}(s)$

$$\hat{f}(s_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(t)\, e^{is_n t} \,\mathrm{d}t}_{\to f(t)e^{-ist}\text{pktw.}}$$

$$|f(t)\, e^{-is_n t}| \leq |f(t)|$$

Majorisierte Konvergenz $\Rightarrow \hat{f}(s_n)$ konvergiert gegen $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-ist} \,\mathrm{d}t = \hat{f}(s)$ ■

C[2.1] Beispiel

Sei $f(t) := 1 \quad \forall\, t \in [a,b] \subset \mathbb{R}$, sonst $f(t) := 0$, d.h. $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b 1 \cdot e^{-ist} \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \begin{cases} \left[\frac{e^{-ist}}{-is}\right]_a^b & s \neq 0 \\ |b-a| & s = 0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \begin{cases} \frac{e^{-isb} - e^{-isa}}{-is} & s \neq 0 \\ |b-a| & s = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Reelle Umrechnung für Spezialfall $a = -b$ für $s \neq 0$

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-ibs} - e^{ibs}}{-is} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2 \sin bs}{s} \\ &= \frac{2b}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\frac{\sin bs}{bs}}_{\text{setze 1 für } s=0} \end{aligned}$$

$\hat{f}$ ist stetig!

Bezeichnungen

- $\hat{f} = \mathcal{F}[f]$ oder $\hat{f}(s) = \mathcal{F}[f(t)](s)$
- $BC(\mathbb{R}) :=$ Vektorraum der stetigen, beschränkten Funktionen $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit der sup-Norm $\|h\|_\infty = \sup\limits_{s \in \mathbb{R}} |h(s)|$

D[2.1] Satz

Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \to BC(\mathbb{R})$ ist linear und stetig bzgl. der Eins-Norm in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ und der ∞-Norm. Es gilt

$$\boxed{\|\hat{f}\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1} \tag{2.1}$$

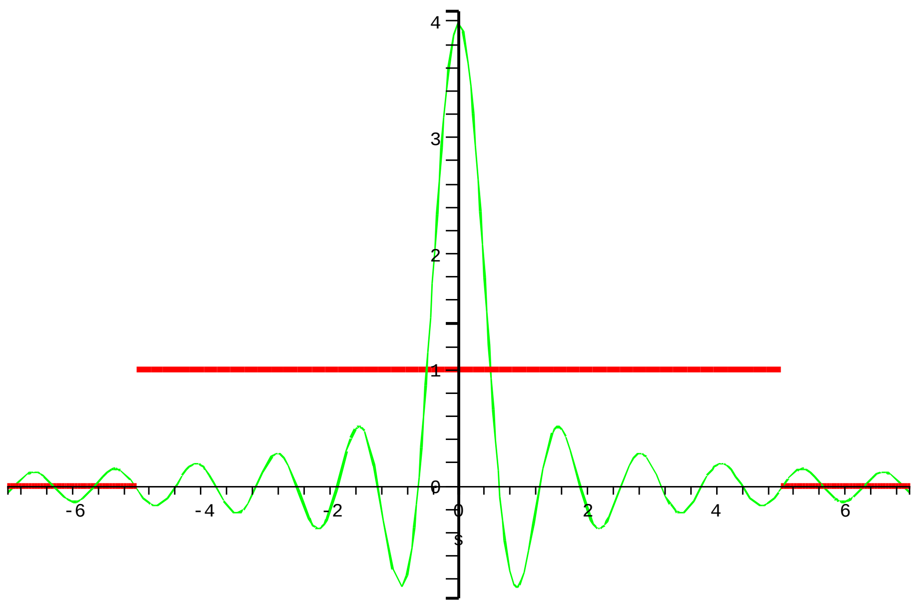


Abbildung 2.1: $\mathbf{1}_{[-5,5]}$ und ihre Fouriertransformierte $\hat{\mathbf{1}}_{[-5,5]}$

Beweis

$f \overset{\mathcal{F}}{\mapsto} \hat{f},\ \hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-ist}\, \mathrm{d}t$

Linearität klar

Stetigkeit Oben in B[2.1] war $|\hat{f}(s)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1 \quad \forall\, s \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \|\hat{f}\|_\infty \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$$

E[2.1] Skalierungsregel

Für $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}),\ a \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

(i) $\mathcal{F}[f(t+a)](s) = e^{ias}\, \mathcal{F}[f(t)](s)$

(ii) $\mathcal{F}[e^{iat}\, f(t)](s) = \mathcal{F}[f(t)](s-a)$

(iii) $\mathcal{F}[f(\beta \cdot t)](s) = \frac{1}{|\beta|} \mathcal{F}[f(t)] \left(\frac{s}{\beta}\right)$

Beweis

zu (i) [(ii), (iii) analog]

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(t+a)](s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t+a)\, e^{-ist}\, \mathrm{d}t \\
&\underset{\overline{\overline{}}}{\overset{t+a=:\tau}{}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, \underbrace{e^{-is(\tau-a)}}_{e^{-is\tau}e^{+isa}}\, \mathrm{d}\tau \\
&= e^{isa} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-is\tau}\, \mathrm{d}\tau \\
&= e^{isa} \mathcal{F}[f(t)](s)
\end{aligned}$$

■

F[2.1] Beispiel

Fouriertransformation der Gaußfunktion $f(t) = e^{-t^2}$
Man weiß: $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $\displaystyle\int -\infty^{\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-ist}\, \mathrm{d}t,\ \hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Fouriertransformierte von f zu errechnen. Zwei Lösungswege sind die Errechnung durch eine Diffenrentialgleichung für $\hat{f}$, des Weiteren kann man die Cauchy'sche Integralformel anwenden. Wir zeigen den Weg über die Differentialgleichung:

$$\hat{f}'(s) = -\frac{s}{2}\hat{f}(s),\ \hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \boxed{\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{s^2}{4}}}$$

Also: $\mathcal{F}[e^{-t^2}](s) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{s^2}{4}}$ Mit E[2.1] wähle ein $\gamma > 0$:

$$\Rightarrow \mathcal{F}[e^{-\gamma t^2}](s) = \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} e^{-\frac{s^2}{4\gamma}}$$

Mit der speziellen Wahl von $\gamma = \frac{1}{2}$ erhält man

$$\Longrightarrow \boxed{\mathcal{F}[e^{-\frac{t^2}{2}}](s) = e^{-\frac{s^2}{2}}} \tag{2.2}$$

$t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ ist also ihre eigene Fouriertransformierte.

G[2.1] Definition

Eine Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn sie Linearkombination von charakteristischen Funktionen $\mathbf{1}_{J_k}$ von endlich vielen beschränkten und paarweise volumenfremden[1] Intervallen $J_1, \ldots, J_n$ von $\mathbb{R}$ ist.

$$h = \sum_{k=1}^{n} h_k \cdot \mathbf{1}_{J_k}$$

$$h\,|_{J_k} = h_k = \text{const} \in \mathbb{C},\ h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$$

[1] heißt: höchstens Randpunkte gemeinsam

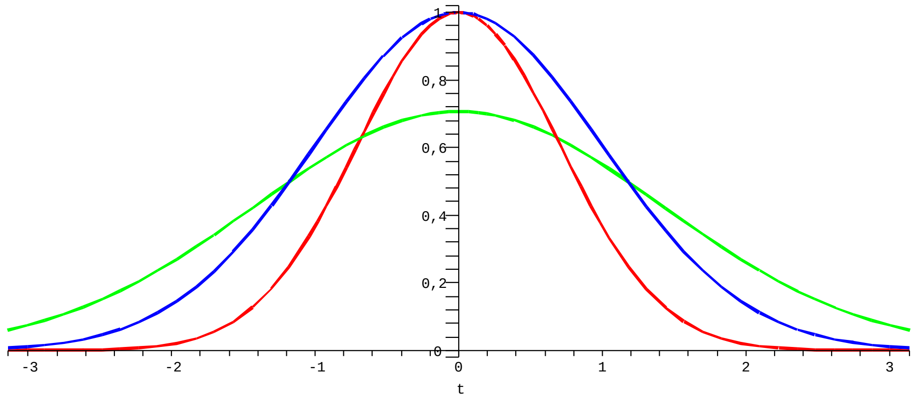


Abbildung 2.2: Die Funktion $f(t) = e^{-t^2}$, ihre Fouriertransformierte $\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{s^2}{4}}$ und die Funktion $\widetilde{f}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, die sich selbst als Fouriertransformierte hat.

H[2.1] Lemma

Die Menge der Treppenfunktionen ist $\mathcal{L}^1$-dicht in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Beweis

$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \underset{\mathcal{L}^1\text{-dicht}}{\supseteq} K_1^0(\mathbb{R}) \underset{\mathcal{L}^1\text{-dicht}}{\supseteq}$ Treppenfunktionen ■

I[2.1] Satz ($\mathcal{L}^1$-Variante von Riemann-Lebesgue)

$$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow \lim_{s \to \pm\infty} \hat{f}(s) = 0 \tag{2.3}$$

Beweis

1. Zunächst $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$ charakteristische Funktion eines einzelnen Intervalls. Laut Beispiel C[2.1]: $\hat{\mathbf{1}}_{[a,b]} \xrightarrow{s \to \pm\infty} 0$.
2. Damit für jede Treppenfunktion h: $\lim_{s \to \pm\infty} \hat{h}(s) = 0$.
3. $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$. Wähle Treppenfunktion h mit
$$\|f - h\|_1 < \sqrt{\tfrac{\pi}{2}} \cdot \varepsilon \qquad \text{geht nach H[2.1]}$$
Wähle $S \in \mathbb{R}^+$ mit
$$|\hat{h}(s)| < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } |s| > S$$
Dann:
$$\begin{aligned} |\hat{f}(s)| &\leq |\hat{h}(s)| + |\hat{f}(s) - \hat{h}(s)| \\ &\leq |\hat{h}(s)| + \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f - h\|_1 \quad \text{D[2.1]} \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\tfrac{\pi}{2}} \cdot \varepsilon \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$
für $|s| > S$. ■

2.2 Die Faltung

A[2.2] Lemma

$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)$. Dann gehört das Tensorprodukt

$$f \otimes g : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{C},$$

definiert durch

$$\big(f \otimes g\big)(x,y) := f(x) \cdot g(y)$$

zu $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{n+m})$ und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x)g(y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbb{R}^m} g(y)\,\mathrm{d}y \tag{2.4}$$

Beweis

Es reicht zu zeigen: $f \otimes g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{n+m})$. Dann folgt die Formel aus Fubini.
Sei

- (f_k) eine Folge in $K_1^0(\mathbb{R}^n)$ approximierend für f,
- (g_k) eine Folge in $K_1^0(\mathbb{R}^m)$ approximierend für g.

Dann ist zu zeigen:

1. $(f_k \otimes g_k)$ Folge in $K_1^0(\mathbb{R}^{n+m})$
2. $f_k(x) \cdot g_k(y) \longrightarrow f(x)g(y)$ fast überall in $\mathbb{R}^{n+m}$
3. $(f_k \otimes g_k)$ Cauchy-Folge in $K_1^0(\mathbb{R}^{n+m})$

Die Aussagen 1. und 2. sind leicht zu zeigen (hier ohne Demonstration).

zu 3.

$$f_k(x)\,g_k(y) - f_\ell(x)\,g_\ell(y) = (f_k(x) - f_\ell(x)) \cdot g_k(y) + f_\ell(x) \cdot (g_k(y) - g_\ell(y))$$

Daraus:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} |f_k(x)\,g_k(y) - f_\ell(x)\,g_\ell(y)|\,\mathrm{d}(x,y) \quad &\le \quad \int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} |f_k(x) - f_\ell(x)| \cdot |g_k(y)|\,\mathrm{d}(x,y) \\
&\quad + \int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} |f_\ell(x)| \cdot |g_k(y) - g_\ell(y)|\,\mathrm{d}(x,y) \\
&= \quad \|f_k - f_\ell\|_1 \cdot \underbrace{\|g_k\|_1}_{\to\|g\|_1} + \underbrace{\|f_k\|_1}_{\to\|f\|_1} \cdot \|g_k - g_\ell\|_1
\end{aligned}$$

Also: $\exists\, C :\ \|f_\ell\|_1 \le C,\ \|g_k\|_1 \le C \quad \forall\, k, l$. Somit

$$\|f_k \otimes g_k - f_\ell \otimes g_\ell\|_1 \le C \cdot (\|f_k - f_\ell\|_1 + \|g_k - g_\ell\|_1)\,,$$

also $(f_k \otimes g_k)$ Cauchyfolge. ■

Faltung von $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{ccc}
(x,y) & \mapsto & f(x) \cdot g(y) \text{ aus } \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2) \\
 & \Downarrow & {\scriptstyle x=:t \atop \scriptstyle t=:s-t}\}\ \text{Det.} = 1 \\
(t,s) & \mapsto & f(t) \cdot g(s-t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)
\end{array}$$

$$\boxed{\big(f * g\big)(s) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, g(s-t)\,\mathrm{d}t} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \big(f * g\big)(s)\,\mathrm{d}s &= \int_{\mathbb{R}^2} \big(f \otimes g\big)(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)\\ &\overset{\text{A[2.2]}}{=\!=} \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Analog:

$$\int_{\mathbb{R}} |f * g| \leq \int_{\mathbb{R}} |f| \cdot \int_{\mathbb{R}} |g|$$

(d.h. $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$)

B[2.2] Definition und Satz

Zu $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ heißt

$$f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

definiert durch (2.5), die *Faltung* von f und g. Diese definiert eine bilineare und bzgl. der 1-Norm stetige Abbildung

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \times \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) &\to \mathcal{L}^1(\mathbb{R})\\ (f,g) &\mapsto f * g\end{aligned}$$

mit den Regeln

(i) $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$

(ii) $f * g = g * f$

(iii) $(f * g) * h = f * (g * h) =: f * g * h$

Beweis

zur Wohldefiniertheit und (i): Vorüberlegungen. (i) $\Rightarrow$ $(f,g) \mapsto f * g$ stetig (generell)[2]

zu (ii)

$$\begin{aligned}\big(f * g\big)(s) &= \int_{\mathbb{R}} f(t)\, g(s-t)\,\mathrm{d}t\\ &\overset{\tau := s-t}{=\!=\!=} \int_{\mathbb{R}} f(s-\tau)\, g(\tau) \cdot |-1|\,\mathrm{d}\tau\\ &= \big(g * f\big)(s)\end{aligned}$$

zu (iii) Analog zu (ii) ■

C[2.2] Satz

Für $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ gilt:

$$\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi} \cdot \hat{f} \cdot \hat{g}$$

[2] vgl. Walter, Analysis II, K(ii)[10.1]

Beweis

$$\begin{aligned}
\widehat{f*g}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (f*g)(t)\cdot e^{-ist}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(\tau)\,g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) e^{-ist}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^2} f(\tau)\,g(t-\tau)\,e^{-ist}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^2} f(\tau)\,e^{-i\tau s}\,g(t-\tau)\,e^{-i(t-\tau)s}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t \\
&\underset{\sigma:=t-\tau}{\overset{\tau=\tau}{=\!=}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^2} f(\tau)\,e^{-i\tau s}\cdot g(\sigma)\,e^{-i\sigma s}\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau \\
&\overset{\text{A[2.2]}}{=\!=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\tau)\,e^{-i\tau s}\;\mathrm{d}\tau \cdot \int_{\mathbb{R}} g(\sigma)\,e^{-i\sigma s}\;\mathrm{d}\sigma \\
&= \sqrt{2\pi}\cdot \hat{f}(s)\cdot \hat{g}(s)
\end{aligned}$$

■

D[2.2] Folgerung

Bzgl. $*$ existiert **kein** Neutralelement in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Beweis

Annahme: $\exists\, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}):\ f*g=f \quad \forall f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Dann gilt nach C[2.2]

$$\sqrt{2\pi}\hat{f}\hat{g} = \hat{f} \quad \forall f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$$

Setze dann speziell $f(t) := e^{-\frac{t^2}{2}}$, also $\hat{f}(s) = e^{-\frac{s^2}{2}}$, also

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}e^{-\frac{s^2}{2}}\cdot\hat{g}(s) &= e^{-\frac{s^2}{2}} \\
\Longrightarrow \hat{g}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \lightning \text{ zu I[2.1]}
\end{aligned}$$

■

Es existieren jedoch „approximative Neutralelemente“

E[2.2] Satz

Sei $\psi\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ mit $\int_{\mathbb{R}}\psi = 1$. Für $r>0$ sei

$$\psi_r(t) := \tfrac{1}{r}\psi\left(\tfrac{t}{r}\right)$$

Dann ist auch $\psi_r\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ und $\int_{\mathbb{R}}\psi_r = 1$ und für $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ gilt

$$\lim_{r\downarrow 0}\|f - f*\psi_r\|_1 = 0$$

Hinweise:

- Es gilt

$$\begin{aligned}
(f*\psi_r)(s) &= \int_{\mathbb{R}} f(t-s)\,\psi_r(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\psi_r(t-s)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

- Damit Regularisierung möglich

Beweis

1. $\psi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ folgt aus Transformationssatz: $1 = \int_{\mathbb{R}} \psi(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{r}\psi\left(\frac{t}{r}\right)$. Analog: $\|\psi_r\|_1 = \|\psi\|_1$.

2. Zunächst $f \in K_1^0(\mathbb{R})$, etwa $\mathrm{Tr}(f) \subset [-R, R]$. $\varepsilon > 0$ sei vorgegeben. Dann ist $f\big|_{[-R,R]}$ gleichmäßig stetig, und erst recht f selbst (da 0 außerhalb $[-R, R]$). Somit

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq \omega_g(|t_1 - t_2|)$$

$$\left|\begin{array}{l}\omega_f(\eta) := \sup\{|f(x) - f(y)| \,:\, |x - y| < \eta\} \in \mathbb{R} \text{ Stetigkeitsmodul} \\ \lim\limits_{\eta \to 0} \omega_f(\eta) = 0 \textit{ (vgl. Walter, Analysis I, E[5.1])}\end{array}\right.$$

Aus (2.5) folgt $f(s) = \int_{\mathbb{R}} f(s)\,\psi_r(t)\,\mathrm{d}t$, also:

$$\begin{aligned}
f(s) - \big(f * \psi_r\big)(s) &= \int_{\mathbb{R}} f(s)\,\psi(t)\,\mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}} f(s-t)\,\psi_r(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}} \big(f(s) - f(s-t)\big)\,\psi_r(t)\,\mathrm{d}t \\
&\left|\begin{array}{c}\int \dots \\ \Downarrow\end{array}\right| \\
\|f - (f * \psi_r)\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} \left|\int_{\mathbb{R}} \big(f(s) - f(s-t)\big)\psi_r(t)\,\mathrm{d}t\right| \mathrm{d}s \\
&\leq \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\delta}^{\delta} |f(s) - f(s-t)| \cdot |\psi_r(t)|\,\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}s}_{=:I_1} \\
&\quad + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{|t|>\delta} |f(s) - f(s-t)| \cdot |\psi_r(t)|\,\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}s}_{=:I_2} \\
&\qquad (0 < \delta \leq 1)
\end{aligned}$$

zu I_1:

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \int_{|s| \leq R+1} \left(\int_{-\delta}^{\delta} \omega_f(\delta) \cdot |\psi_r(t)|\,\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}s \\
&\leq \omega_f(\delta) \cdot \|\psi_r\|_1 \cdot 2(R+1)
\end{aligned}$$

Wähle δ so klein, dass $I_1 < \frac{\varepsilon}{2}$.

zu I_2: Nach Fubini:

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{|t|>\delta} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} |f(s) - f(s-t)| \,\mathrm{d}s \right)}_{\leq 2 \cdot \|f\|_1} \cdot |\psi_r(t)| \,\mathrm{d}t \\
&\leq 2\|f\|_1 \cdot \int_{|t|>\delta} |\psi_r(t)| \,\mathrm{d}t \\
&= 2\|f\|_1 \cdot \int_{\tau > \frac{\delta}{r}} |\psi(\tau)| \,\mathrm{d}\tau \\
&= 2\|f\|_1 \left(\int_{\mathbb{R}} |\psi(t)| \,\mathrm{d}t - \underbrace{\int_{\tau \leq \frac{\delta}{r}} |\psi(\tau)| \,\mathrm{d}\tau}_{\xrightarrow{r \to 0} \int_{\mathbb{R}} |\psi(\tau)| \,\mathrm{d}\tau} \right) \\
&\xrightarrow{r \downarrow 0} 0
\end{aligned}
$$

Wähle r so klein, dass $I_2 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Zusammen:

$$
\|f - f * \psi_r\|_1 < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
$$

für die getroffenen Wahlen von δ und r.

3. $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $g \in K_1^0(\mathbb{R})$. Vorausabschätzung:

$$
\begin{aligned}
\|f - f * \psi_r\|_1 &= \Big\| (f-g) \quad - \quad (f-g) * \psi_r \quad + \quad g - g * \psi_r \Big\|_1 \\
&\leq \|f - g\|_1 \quad + \quad \|(f-g)\|_1 \cdot \underbrace{\|\psi_r\|_1}_{= \|\psi\|_1} \quad + \quad \|g - g * \psi_r\|_1
\end{aligned}
$$

Durch Wahl von g kann $\|f - g\|_1$ beliebig klein gemacht werden, und durch Wahl von r ebenso $\|g - g * \psi_r\|_1$. ∎

F[2.2] Umkehrformel

Für $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ war $\hat{f} \in BC(\mathbb{R})$ definiert durch

$$
\hat{f}(s) := \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-ist} \,\mathrm{d}t
$$

Ist $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, so gilt fast überall

$$
\boxed{f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(s)\, e^{ist} \,\mathrm{d}s} \tag{2.6}
$$

(inverse Fouriertransformation)

wobei die rechte Seite überall in $t \in \mathbb{R}$ stetig ist.

> Hinweis: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s)\, e^{ist} \,\mathrm{d}s = \hat{\hat{f}}(-t)$

Beweis

$\hat{\hat{f}}(-t)$ stetig nach B[2.1].

zu (2.6): Setze in die rechte Seite statt $\hat{f}(s)$ den Term $\hat{f}(s)\cdot\varphi(s)$ ein für irgendein $\varphi\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Dies ist möglich, da $\hat{f}$ beschränkt ist.

Dann:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s)\cdot\varphi(s)\cdot e^{ist}\,\mathrm{d}t \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(\tau)\,e^{is\tau}\,\mathrm{d}\tau\right)\varphi(s)e^{ist}\,\mathrm{d}s\\
&\overset{s\leftrightsquigarrow\tau}{=\!=} \quad \int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(s)\,e^{-is\tau}\,\mathrm{d}s\right)\varphi(\tau)\,e^{i\tau t}\,\mathrm{d}\tau\\
&\underset{\text{Fubini}}{=\!=} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}^2} f(s)\,e^{-is\tau}\varphi(\tau)\,e^{i\tau t}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau\\
&= \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{i\tau(t-s)}\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)f(s)\,\mathrm{d}s\\
&\overset{\sigma:=t-s}{=\!=} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{i\tau\sigma}\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)f(t-\sigma)\,\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(s)\,\varphi(s)\,e^{ist}\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\hat{\varphi}(-\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \tag{2.7}$$

Spezialisiere nun $\psi(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$ mit $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\,\mathrm{d}t = 1,\ \hat{\psi}=\psi$.

$\varphi_r(t) := \psi(rt) \Rightarrow \hat{\varphi}_r(s) = \frac{1}{r}\hat{\psi}\left(\frac{s}{r}\right) = \frac{1}{r}\psi\left(\frac{s}{r}\right) = \psi_r(s)$.
Dann folgt aus (2.7) für $\varphi=\varphi_r$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(s)\,e^{-r^2\frac{s^2}{2}}\,e^{ist}\,\mathrm{d}s \quad &= \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\sigma)\,\psi_r(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\\
&= \quad \big(f*\psi_r\big)(t)
\end{aligned}$$

Lasse r gegen Null laufen: $r\downarrow 0 \Rightarrow e^{-\frac{r^2s^2}{2}} \to 1$, also linke Seite konvergiert gegen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(s)\,e^{ist}\,\mathrm{d}s$.

Rechte Seite konvergiert $\mathcal{L}^1$ gegen f nach E[2.2]. Also konvergiert eine Teilfolge der rechten Seite fast überall gegen f[3]. Dann:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(s)\,e^{ist}\,\mathrm{d}s = f(t) \quad \text{fast überall}$$

■

G[2.2] Folgerung (Injektivität der Fourier-Transformation)

Seien $f,g\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ und $\hat{f}=\hat{g}$. Dann folgt:

$$f(t) = g(t) \quad \text{fast überall}$$

Beweis

Es reicht zu zeigen: $\hat{f}=0 \Rightarrow f(t)=0$ fast überall. Das ist allerdings klar aus (2.6).

[3] Walter, Analysis II, B.[11.5]

Kapitel 3

Die $\mathcal{L}^p$-Räume

Statt $\int |f|$ nun $\left(\int |f|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, allgemein $\left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ ($\mathcal{L}^p$-Norm)

Generalvoraussetzung:

- W reeller Banach-Raum (als Zielraum)
- Norm in W sei $\|.\|$
- Betrachte $F : \mathbb{R}^n \to W$
- Dann: $\|F\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\|F\|(x) := \|F(x)\|$ Normabbildung
  Standardfall $W = \mathbb{R}$. Dann schreibt man statt $\|f\|$ nur $|f|$.

3.1 Definitionen und einfache Eigenschaften

A[3.1] Satz und Definition

Für $F : \mathbb{R}^n \to W$ sind äquivalent:

(i) Zu jedem $a \in \mathbb{R}^n$ existiert eine Umbegung von a, über die F integrierbar ist.

(ii) Zu jedem $a \in \mathbb{R}^n$ existiert eine offene Umgebung von a, über die F integrierbar ist.

(iii) F ist über jede kompakte Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar.

(iv) F ist über jeden abgeschlossenen Ball integrierbar.

Ist dies erfüllt, so heißt F *lokal integrierbar* (oder *kompakt integrierbar*).

Beweis

(i) $\Rightarrow$ (ii) zu $a \in \mathbb{R}^n$ sei U gemäß (i) bestimmt und V sei offen und beschränkt mit $a \in V \subseteq U$. Dann $\mathbf{1}_U F$ integrierbar und auch $\mathbf{1}_V$ (vgl. Walter, Ana II: J[11.6]). Also nach Produktsatz (Walter, Ana II; K[11.5]) ist auch

$$\mathbf{1}_V \cdot (\mathbf{1}_U F) = \mathbf{1}_{V \cap U} F = \mathbf{1}_V F$$

integrierbar.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Zu C existieren endlich viele V_j, über die F integrierbar ist mit $C \subset \bigcup_j V_j$. Dann: $C = \bigcup_j (C \cap V_j)$. Nun ist F über $C \cap V_j$ integrierbar, da $C \cap V_j$ integrierbar ist (Walter, Ana II: J[11.6]), also nach Produktsatz für $\mathbf{1}_{C \cap V_j} F$ anwendbar. Also ist F über C integrierbar (Walter, Ana II: M[11.6])

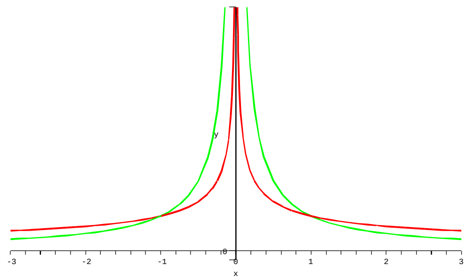
(iii) $\Rightarrow$ **(iv)** trivial, da jeder abgeschlossene Ball kompakt ist!

(iv) $\Rightarrow$ **(i)** Wähle zu $a \in \mathbb{R}^n$ einen abgeschlossenen Ball $\bar{B}$ mit Zentrum $a \in \bar{B}$. Dann ist $\bar{B}$ Umgebung von a und F ist über $\bar{B}$ integrierbar. ■

B[3.1] Beispiele

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ für $x \neq 0$, $f(0) := 0$ ist *lokal integrierbar*, aber nicht integrierbar (Der Flächeninhalt konvergiert nicht)

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{|x|}$ für $x \neq 0$, $f(0) := 0$ ist nicht lokal integrierbar (bei 0 schlägt dies fehl)



$\frac{1}{\sqrt{|x|}}$, $\frac{1}{|x|}$

(iii) Jedes integrierbare $F : \mathbb{R}^n \to W$ ist lokal integrierbar. [Für kompakte C ist $\mathbf{1}_C$, also auch $\mathbf{1}_C F$ integrierbar.]

(iv) Jede stetige Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist lokal integrierbar (Walter, Ana II: P[11.6]).

C[3.1] Definition und Satz

Sei $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, W)$ die Menge der lokal integrierbaren Funktionen $F : \mathbb{R}^n \to W$. ($\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) =: \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$).
Dann gilt:

(i) $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, W)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und es gilt:

$$F \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, W) \Longrightarrow \|F\| \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$$

(ii) $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, W) \underset{\text{UVR}}{\subseteq} \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, W)$

(iii) $F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, W) \Longleftrightarrow F \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, W)$ und $\exists\, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) : \|F\| \leq g$

Beweis

zu (i) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $F, G \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, W)$, C kompakt. Mit F, G sind auch αF, $F + G$, $\|F\|$ über C integrierbar (Walter, Ana II: G[11.6]).

zu (ii) : Klar aus B[3.1].(iii)

zu (iii) :

„$\Rightarrow$“ Klar mit $g := \|F\|$

„$\Leftarrow$“ Sei $C_1 \subset C_2 \subset \ldots$ Ausschöpfung von $\mathbb{R}^n$ mit kompakten Mengen. Dann ist F über alle C_k integrierbar mit

$$\int_{C_k} \|F\| \leq \int_{C_k} g \leq \int_{\mathbb{R}^n} g < \infty,$$

also f lokal integrierbar nach Ausschöpfungssatz (Walter, Ana II: H[11.6]). ■

D[3.1] Lemma

Seien $W_1, \dots, W_r$ Banach-Räume, $A \subset \mathbb{R}^n$ und

(Φ1) $\Phi : W_1 \times W_2 \times \ldots \times W_R \to \mathbb{R}$ stetig, $\Phi(0, 0, \dots, 0) = 0$

(Φ2) $F_1 : A \to W_1, F_2 : A \to W_2, \dots, F_r : A \to W_r$ alle integierbar

(Φ3) Zu $\varphi : A \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) := \Phi\big(F_1(x), \dots, F_2(x)\big)$ existiert eine Majorante $g \in \mathcal{L}^1(A)$, d.h. $|\varphi| \leq g$.

Dann ist φ integrierbar über A.

Beweis

siehe B[1.2] ■

E[3.1] Beispiele

1. $r = 2$, $W_1 = W_2 = W$, $\Phi(w_1, w_2) := \|w_1\| \cdot \|w_2\|$ erfüllt (Φ1). Somit F, G integrierbar über A, $\|F\| \cdot \|G\| \leq g \in \mathcal{L}^1(A) \Longrightarrow \|F\| \cdot \|G\| \in \mathcal{L}^1(A)$

2. $r = 1$, $W_1 = W$, A integrierbar. Dann gilt für $0 < p < q$:

$$\|F\|^q \in \mathcal{L}^1(A) \Longrightarrow \|F\|^p \in \mathcal{L}^1(A)$$

   (Verallg. von B[1.4])

   Beweis: Nehme $\Phi(w) := \|w\|^q$. Dann ist (Φ1) erfüllt. Betrachte $t^p \leq \max\{1, t^q\}$, $t \geq 0$. Also:

$$\|F(x)\|^p \leq \underbrace{\max\{1, \|F(x)\|^q\}}_{=:g(x) \in \mathcal{L}^1(A)}, \quad x \in A$$

   Also folgt die Behauptung.

3. Sei $F : A \to W$ integrierbar, beschränkt, $p \geq 1$. Dann ist $\|F\|^p : A \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann in D[3.1] mit $r = 1$, $W_1 = W$, $\Phi : W \to \mathbb{R}$, $\Phi(w) := \|w\|^p$ (Φ1) erfüllt; $\varphi(x) = \|F(x)\|^p$. Nach Voraussetzung existiert ein $K > 0$, so dass $\|F(x)\| \leq K \, \forall \, x \in A$ gilt. Dann:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \|F(x)\|^p \\ &= \|F(x)\|^{p-1} \cdot \|F(x)\| \\ &< K^{p-1} \cdot \|F(x)\| \\ &=: g(x) \end{aligned}$$

   $g \in \mathcal{L}^1(A)$, also $\varphi \in \mathcal{L}^1(A)$, d.h. $\|F\|^p \in \mathcal{L}^1(A)$.

F[3.1] Definition ($\mathcal{L}^p$-Raum, p-Norm)

Für jedes $p \geq 1$ definiert man den $\mathcal{L}^p$-Raum

$$\boxed{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, W) := \{F : \mathbb{R}^n \to W \ : \ F \text{ lokal integrierbar}, \|F\|^p \text{ integrierbar}\}} \tag{3.1}$$

und

$$\boxed{\|F\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|F\|^p \right)^{\frac{1}{p}}} \tag{3.2}$$

ist die so genannte p-Norm.

G[3.1] Bemerkung

1. $F \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, W) \Longrightarrow \|F\| \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) =: \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ klar aus C[3.1].(i)
2. Für $p = 1$ hat man Koinzidenz mit der Integrierbarkeit wegen C[3.1].(iii).

Bei $p > 1$ betrachtet man neben $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, W)$ auch $\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n, W)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (solche p, q heißen *konjugiert*).

H[3.1] Lemma

Sei $a, b > 0$, p, q konjugiert. Dann:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \tfrac{1}{2}(a^p + b^p) \tag{3.3}$$

und

$$a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leq \tfrac{a}{p} + \tfrac{b}{q} \tag{3.4}$$

Beweis

zu (3.3): Aus Konvexität von $t \mapsto t^p$
zu (3.4): Stichwort: *Young'sche Ungleichung*

I[3.1] Satz

Für konjugierte $p, q > 1$ gilt:

(i) $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, W)$ ist $\mathbb{R}$-Vektorraum

(ii) $F \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, W), G \in \mathcal{L}^q(R^n, W)$:

$$\|F\| \cdot \|G\| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \tag{3.5}$$

und es gilt die **Hölder-Ungleichung**

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^n} \big(\|F\| \cdot \|G\|\big) \leq \|F\|_p \cdot \|G\|_q} \tag{3.6}$$

(iii) $\|.\|_p$ ist eine Semi-Norm auf $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, W)$

$$\|F\|_p = 0 \Longrightarrow F(x) = 0 \text{ fast überall in } \mathbb{R}^n \tag{3.7}$$

Insbesondere gilt die Dreiecksungleichung (so genannte **Minkowski-Ungleichung**)

$$\boxed{\|F + G\|_p \leq \|F\|_p + \|G\|_p \quad \forall F, G \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, W)} \tag{3.8}$$

Beweis

zu (3.7) Klar aus Definition von $\|F\|_p$.

zu (i) Für $\alpha \in \mathbb{R}$, $F \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, W)$ ist auch αF lokal integrierbar und $\|\alpha F\|^p = |\alpha|^p \cdot \|F\|^p$ integrierbar; also $\alpha F \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, W)$. Für $F, G \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, W)$ ist $F + G$ lokal integrierbar (C[3.1]). Zu zeigen bleibt, dass $\|F+G\|^p \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ ist. Dazu: D[3.1] für $r = 2$, $\Phi : W \times W \to \mathbb{R}$ mit

$$\Phi(w_1, w_2) := \|w_1 + w_2\|$$

Eine Majorante für $\varphi := \|F+G\|^p$ erhält man aus (3.3):

$$\begin{aligned} \|F(x)+G(x)\|^p &\le \big(\|F(x)\|+\|G(x)\|\big)^p \\ &\le \underbrace{2^{p-1}\cdot\big(\|F(x)\|^p+\|G(x)\|^p\big)}_{=:g(x)} \end{aligned}$$

Somit gilt $\|F+G\|^p \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$

zu (ii) O.B.d.A. $\|F\|_p > 0, \|G\|_q > 0$.
Zu zeigen: $\|F\|\cdot\|G\| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.
Dazu: D[3.1] für $r=2,\ \Phi : W\times W \to \mathbb{R},\ \Phi(w_1,w_2) := \|w_1\|\cdot\|w_2\|$.
Eine Majorante für $\varphi := \|F\|\cdot\|G\|$ erhält man aus (3.4). Setze dort $a = \frac{\|F(x)\|^p}{\|F\|_p^p},\ b = \frac{\|G(x)\|^q}{\|G\|_q^q}$.
Dann:

$$\frac{\|F(x)\|}{\|F\|_p}\cdot\frac{\|G(x)\|}{\|G\|_q} \le \frac{1}{p}\frac{\|F(x)\|^p}{\|F\|_p^p} + \frac{1}{p}\frac{\|G(x)\|^q}{\|G\|_q^q} \quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n$$

Somit ist $\|F\|\cdot\|G\|$ integrierbar.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \|F(x)\|\cdot\|G(x)\|\,\mathrm{d}x &\le \tfrac{1}{p}\tfrac{1}{\|F\|_p^{p-1}}\cdot\|G\|_q\cdot\|F\|_p^p \quad + \quad \tfrac{1}{q}\tfrac{1}{\|G\|_q^{q-1}}\cdot\|F\|_p\cdot\|G\|_q^q \\ &= \tfrac{1}{p}\|G\|_q\cdot\|F\|_p + \tfrac{1}{q}\|F\|_p\cdot\|G\|_q \\ &= \left(\tfrac{1}{p}+\tfrac{1}{q}\right)\cdot(\|F\|_p\cdot\|G\|_q) \\ &= \|F\|_p\cdot\|G\|_q \end{aligned}$$

zu (iii) Klar ist $\|\alpha F\|_p = |a|\cdot\|F\|_p$.
z.zg: Dreiecksungleichung für $F,G\in\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n,W)$.
Dazu sei o.B.d.A. $\|F+G\|_p > 0$. Starte mit

$$\|F+G\|^p \le \|F\|\cdot\|F+G\|^{p-1} + \|G\|\cdot\|F+G\|^{p-1} \tag{3.9}$$

Zwischenbehauptung $\|F+G\|^{p-1}\in\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$

Zwischenbeweis $\|F+G\|^{p-1}$ ist über jedes komakte C integrierbar nach E[3.1].(ii), da $0<p-1<p$ gilt. Weiter: $(\|F+G\|^{p-1})^q = \|F+G\|^p \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ nach (i). □

Somit aus (3.9) durch Integration mittels Hölderungleichung (3.6)

$$\|F+G\|_p^p \le (\|F\|_p+\|G\|_p)\cdot\big\|\,\|F+G\|^{p-1}\,\big\|_q \tag{3.10}$$

Nun

$$\begin{aligned} \big\|\,\|F+G\|^{p-1}\,\big\| &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}\|F+G\|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}\|F+G\|^{p}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\|F+G\|_p^p\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|F+G\|_p^{\frac{p}{q}}, \end{aligned}$$

also aus (3.10) durch Division mit $\|F+G\|^{\frac{p}{q}}$, da $p-\frac{p}{q}=1$

$$\|F+G\|_p \le \|F\|_p + \|G\|_p$$

■

3.2 Die Vollständigkeit der $\mathcal{L}^p$-Räume

A[3.2] Lemma

Seien $G_1, G_2, \ldots$ aus $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, W)$ mit

$$s := \sum_{k=1}^{\infty} \|G_k\|_p < \infty$$

Dann ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} G_k$ $\mathcal{L}^p$-kovergent gegen ein $S \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, W)$.

Beweis

Setze $h_k := \|G_1\| + \ldots + \|G_k\| \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ ($\rightsquigarrow$ G[3.1].(i)), $H_k := G_1 + \ldots G_k \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, W)$ ($\rightsquigarrow$ I[3.1].(i)). Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} h_k^p \quad &= \quad \|h\|_p^p \\ &\underset{\text{I[3.1].(iii)}}{\leq} \quad \big(\|G_1\|_p + \ldots + \|G_k\|_p\big)^p \\ &\leq \quad s^p \end{aligned}$$

Die die h_k^p argumentweise monoton wachsen, folgt aus Beppo-Levi (vgl. Walter, Ana II: D.[11.5])

$h_k^p \longrightarrow u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ fast überall, $\mathcal{L}^1$
$\int_{\mathbb{R}^n} u \leq s^p$

$$h_k \longrightarrow u^{\frac{1}{p}} =: v \quad \text{fast überall monoton wachsend} \tag{3.11}$$

> **Zwischenbehauptung:** $v \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$
> **Zwischenbeweis:** v ist über jedes kompakte $C \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar nach E[3.1].(ii), da $0 < \frac{1}{p} < 1$. Ferner: $v^p = u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. □

Damit weiter

$$\|v\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} v^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} u\right)^{\frac{1}{p}} \leq s$$

$\sum_{k=1}^{\infty} G_k$ fast überall absolut konvergent nach (3.11). Da W vollständig ist, ist das Majorantenkriterium anwendbar (Walter, Ana II: J[10.4]):

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_k(x) =: S(x),\ \|S(x)\| \leq v(x) \quad \text{fast überall} \tag{3.12}$$

- S ist lokal integrierbar, denn auf jedem kompakten $C \subset \mathbb{R}^n$ ist S Grenzwert von auf C integrierbaren Funktion $H_k\,|_C$ für die auf C gilt:

  $$\|H_k(x)\| \leq h_k(x) \leq v(x)$$

  (majorisierte Konvergenz, vgl. Walter, Ana II: G[11.6])

- Aus $h_k \leq v$ fast überall folgt $\|S\| \leq v$ fast überall (vgl. (3.12)), also $\|S\|^p \leq v^p = u$ fast überall, somit $\|S\|^p \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ (setze in D[3.1]: $r = 1,\ W_1 = \mathbb{R},\ \Phi(t) = t^p$).

Also ist $S \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, W)$.
Weiter gilt $\|H_k - S\|^p \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\begin{aligned}\|H_k - S\| &\leq \|H_k\| + \|S\| \\ &\leq h_k + \|S\| \\ &\leq 2v,\end{aligned}$$

also $\|H_k - S\|^p \leq 2^p v^p = 2^p v$ fast überall, somit nach majorisierter Konvergenz

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|H_k - S\|^p \longrightarrow 0,$$

also: $\|H_k - S\|_p \longrightarrow 0$. ■

B[3.2] Satz von Fischer/Riesz

Der Raum $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, W)$, versehen mit der p-Norm, ist vollständig, also ein *Banach-Raum*.

Beweis

Sei (F_k) eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, W)$. Durch den Übergang zu einer Teilfolge (nicht neu bezeichnet), kann man erreichen

$$\|F_{k+1} - F_k\|_p \leq \frac{1}{2^k}$$

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N = N(\varepsilon) : \|F_\ell - F_m\|_p \leq \varepsilon \, \forall \ell, m \geq N$
Wähle speziell $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$:
$\forall k \in \mathbb{N} \, \exists N_k : \|F_\ell - F_m\|_p \leq \frac{1}{2^k} \, \forall \ell, m \geq N_k$
o.B.d.A. $N_1 < N_2 < N_3 < \ldots$ induktiv.
Teilfolge F_{N_k}. Für diese gilt
$\boxed{\|F_{N_{k+1}} - F_{N_k}\| \leq \frac{1}{2^k}}$

Betrachte dabei die Reihe

$$\underbrace{F_1}_{=:G_1} + \underbrace{(F_2 - F_1)}_{=:G_2} + \underbrace{(F_3 - F_2)}_{=:G_3} + \ldots$$

Ihre k-te Teilsumme ist F_k, also ihre Konvergenz äquivalent mit der von F_k. Da $\|G_k\|_p \leq \frac{1}{2^k}$ ist, folgt aus A[3.2]:

$$(F_k) \text{ ist } \mathcal{L}^p\text{-konvergent gegen ein } S \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, W).$$

Dann gilt die $\mathcal{L}^p$-Konvergenz auch für die ursprüngliche Folge (vgl. Walter, Ana II: F[2.3]). ■

C[3.2] Satz

Gilt für F_k, $F \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, W)$

$$\|F_k - F\|_p \longrightarrow 0,$$

so existiert eine <u>Teil</u>folge von (F_k), die fast überall gegen F konvergiert und für die gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Menge $Z \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mu^*(Z) < \varepsilon$ und $F_k(x) \longrightarrow F(x)$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^n \setminus Z$. *μ^* äußeres Maß*

Beweis

Ohne Einschränkung sei $F = 0$ (sonst betrachte $F_k - F$). Voraussetzung $\|F_k\|_p \longrightarrow 0$. Übergang zu einer Teilfolge (nicht neu bezeichnet) erlaubt

$$\|F_k\|_p < \frac{1}{4^{\frac{k}{p}}} = \frac{1}{\left(4^{\frac{1}{p}}\right)^k} \tag{3.13}$$

Bilde

$$Y_k := \left\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|F_k(x)\|^p > \tfrac{1}{2^k}\right\}$$

Mit der Tschebyscheff-Ungleichung (Walter, Ana II: N[11.4]) folgt:

$$\begin{aligned} \mu^*(Y_k) \quad &\leq \quad \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \|F(x)\|^p \, \mathrm{d}x}{\frac{1}{2^k}} \\ &= \quad \frac{\|F_k\|_p^p}{\frac{1}{2^k}} \\ &\overset{(3.13)}{<} \quad \frac{\frac{1}{4^k}}{\frac{1}{2^k}} \\ &= \quad \frac{1}{2^k} \end{aligned}$$

Sei weiter $Z_k := Y_k \cup Y_k k + 1 \cup \ldots$. Dann:
$\mu^*(Z_k) < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \ldots = \frac{1}{2^{k-1}}$.

$$\begin{aligned} x \notin Z_k, \ \ell \geq k \quad &\Longrightarrow \quad \|F_\ell(x)\|^p \leq \frac{1}{2^\ell} \\ &\Longrightarrow \quad \|F_\ell(x)\| \leq \frac{1}{2^{\frac{\ell}{p}}} \end{aligned}$$

Damit: $F_\ell(x) \longrightarrow 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^n \setminus Z_k$.
$\tilde{Z} := \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$. Dann: $\mu^*(\tilde{Z}) \leq \mu^*(Z_k) \quad \forall\, k$, also $\mu^*(\tilde{Z}) = 0$ und $F_n(x) \longrightarrow 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \tilde{Z} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (\mathbb{R}^n \setminus Z_k)$. ■

Spezialfall: $p = q = 2$
Sei W selbst ein *Hilbert-Raum* mit Skalarprodukt $\langle\, . \,\rangle$. Norm in W dann

$$\|w\| = \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}}$$

Die 2-Norm in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, W)$ ist dann

$$\|F\|_2 := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|F\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

für eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \to W$. Diese Norm im Funktionenraum $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, W)$ entsteht selbst aus einem Skalarprodukt in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, W)$, nämlich

$$\langle\langle F, G \rangle\rangle := \int_{\mathbb{R}^n} \langle F, G \rangle$$

mit $F, G \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, W)$.

D[3.2] Lemma

In dieser Situation gilt für $F, G \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, W)$

$$\langle F, G\rangle \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$$

Beweis

$\langle F, G\rangle = \frac{1}{4}\left(\|F+G\|^2 - \|F-G\|^2\right)$ ■

E[3.2] Folgerung

In $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, W)$ gilt die **Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung**

$$|\langle\langle F, G\rangle\rangle| \leq \|F\|_2 \cdot \|G\|_2 \tag{3.14}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn F, G fast überall linear abhängig sind, d.h. $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: $\alpha F(x) + \beta G(x) = 0$ fast überall ■

Integration über Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ per Nullfortsetzung $\breve{F}$

F[3.2] Definition und Satz

Für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $p \geq 1$ sei

$$\mathcal{L}^p(A, W) := \{F : A \to W \ : \ \breve{F} \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, W)\}$$

Speziell: $\mathcal{L}^p(A) := \mathcal{L}^p(A, \mathbb{R})$
Dann ist für $F \in \mathcal{L}^p(A, W)$

$$\|F\|_p := \|\breve{F}\|_p = \left(\int_A \|F\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$\mathcal{L}^p(A, W)$ ist ein seminormierter, vollständiger Vektorraum und B[3.2] bis E[3.2] gelten analog. ■

Vereinfachung, falls A integrierbar[1]:

G[3.2] Satz

Falls $A \subseteq \mathbb{R}^n$ integrierbar, so gilt die Äquivalenz

$$F \in \mathcal{L}^p(A, W) \Longleftrightarrow F \in \mathcal{L}^1(A, W) \text{ und } \|F\|^p \in \mathcal{L}^1(A)$$

Beweis

„$\Leftarrow$“ Klar, da aus Integrierbarkeit von F die lokale Integrierbarkeit folgt.

„$\Rightarrow$“ Ist $F \in \mathcal{L}^p(A, W)$ gegeben, so ist $\|F\|^p \in \mathcal{L}^1(A)$, also nach E[3.1].(ii) gilt $\|F\| \in \mathcal{L}^1(A)$.
Sei $C_1 \subset C_2 \subset \ldots$ eine Ausschöpfung von $\mathbb{R}^n$ durch Kompakta C_k.

Dann: $(A \cap C_1) \subset (A \cap C_2) \subset \ldots$ ist eine Ausschöpfung von A und F ist über jedes $(A \cap C_k)$ integrierbar, da $\mathbf{1}_{A\cap C_k} \cdot \breve{F} = \mathbf{1}_1 \cdot (\mathbf{1}_{C_k} \cdot \breve{F})$ (Produktsatz, Ana II: K[11.5]).

Da $\displaystyle\int_{A\cap C_k} \|F\| \leq \int_A \|A\|$, folgt nach Ausschöpfungssatz: $F \in \mathcal{L}^1(A, W)$. ■

[1] d.h. A messbar und $\lambda(A) < \infty$

Kapitel 4

Darstellungssätze

4.1 Darstellungssätze und Bezug zur Fourier-Theorie

V sei stets ein reeller Hilbert-Raum mit $\dim V = \infty$, Skalarprodukt $\langle\,.\,\rangle$, Norm $\|\,.\,\|$. Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein ON-System in V.

A[4.1] Lemma

Ist $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 < \infty,$$

so existiert ein $v \in V$ mit $\langle v, c_k\rangle = \gamma_k$, und zwar tut es

$$v := \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k\, c_k \quad \text{(inkl. Konvergenz)}$$

Beweis

1. Konvergenz der Reihe $s_n := \sum_{k=1}^{n} \gamma_k\, c_k$:

$$\begin{aligned} \|s_{n+p} - s_n\|^2 &= \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \gamma_k c_k \right\|^2 \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \gamma_k^2, \end{aligned}$$

   somit ist (s_n) Cauchy-Folge in V, also existiert $v = \lim_{n\to\infty} s_n =: \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k\, c_k$.

2. Für dieses v gilt

$$\begin{aligned} \langle v, c_\ell\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k\, c_k, c_\ell \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \underbrace{\langle c_k, c_\ell\rangle}_{\boldsymbol{\delta}_{k\ell}} \\ &= \gamma_\ell \end{aligned}$$

■

B[4.1] Beispiel

$\ell_2(\mathbb{R}) := \left\{ (\gamma_1, \gamma_2, \dots) \,:\, \gamma_k \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 < \infty \right\}$ ist Vektorraum mit komponentenweisen Verknüpfungen.
Skalarprodukt: $\gamma = (\gamma_k) \in \ell_2(\mathbb{R}),\ \widetilde{\gamma} = (\widetilde{\gamma}_k) \in \ell_2(\mathbb{R})$:

$$\langle \gamma, \widetilde{\gamma} \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \, \widetilde{\gamma}_k$$

Reihe absolut konvergent, da

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |\gamma_k \, \widetilde{\gamma}_k| \quad & \underset{\text{CSU}}{\leq} \quad \left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{l=1}^{n} \widetilde{\gamma}_l^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{l=1}^{\infty} \widetilde{\gamma}_l^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$\langle\, . \,\rangle$ offensichtlich bilinear, symmetrisch, positiv definit, also $\ell_2(\mathbb{R})$ *Prähilbert-Raum.*

C[4.1] Satz

Sei (c_k) maximales ON-System in V.
Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} L : V \quad & \rightarrow \quad \ell_2(\mathbb{R}) \\ v \quad & \mapsto \quad (\langle v, c_k \rangle)_{k \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

linear, bijektiv und *isometrisch*, d.h.

$$\langle L(v), L(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall\, v, w \in V$$

Beweis

1. L **wohldefiniert:** Aus J[1.2]: $\sum_{k=1}^{\infty} \langle v, c_k \rangle^2 \leq \|v\|^2$ (Bessel-Ungleichung)

2. L **linear:** Klar.

3. L **injektiv:** $\langle v, c_k \rangle = 0 \,\forall\, k \Rightarrow v = 0$ (Definition von *maximal*)

4. L **surjektiv:** Aus A[4.1]

5. L **isometrisch:** Aus K[1.2].(iv) (verallgeinerte Parseval-Gleichung). ■

D[4.1] Anwendung auf $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$

Dieser Raum ist nach F[3.2] vollständig und besitzt das maximale ON-System $\widetilde{g}_k$ aus F[1.2] der normierten harmonischen Funktionen gemäß F[1.4].(ii). Somit ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2[0, 2\pi] \ & \rightarrow \ell_2(\mathbb{R}) \\ f \ & \mapsto \sqrt{\pi} \left(\tfrac{a_0}{\sqrt{2}}, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots \right) \end{aligned} \tag{4.1}$$

(a_k, b_k Fourierkoeffizienten von f) *linear, bijektiv und isometrisch.*
Insbesondere existiert zu jeder Folge $(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots) \in \ell_2(\mathbb{R})$, d.h. mit

$$\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k^2 + \beta_k^2\right) < \infty$$

eine Funktion $f \in \mathcal{L}^2[0, 2\pi]$, deren Fourier-Koeffizienten gerade die α_k, β_k sind. f ist durch die Fourier-Koeffizienten fast überall *eindeutig* bestimmt. ■

E[4.1] Folgerung

$\ell_2(\mathbb{R})$ ist vollständig. Man nennt $\ell_2(\mathbb{R})$ den *(reellen) Hilbert'schen Folgenraum.*

Beweis

Die Vollständigkeit folgt aus der Isometrie von (4.1). ■

F[4.1] Lemma von Riesz

Sei (c_k) ein <u>maximales</u> ON-System in V. Dann existiert zu jeder stetigen Linearform $h : V \to \mathbb{R}$ genau ein $b \in V$ mit

$$h(v) = \langle b, v \rangle \quad \forall\, v \in V$$

Beweis

1. Eindeutigkeit

$$\begin{aligned} \langle b, v \rangle = \langle b', v \rangle \ \forall\, v \quad &\Rightarrow \quad \langle b - b', v \rangle = 0 \ \forall\, v \\ &\Rightarrow \quad \langle b - b', b - b' \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \quad b - b' = 0 \end{aligned}$$

2. Existenz Definiere $b := \sum_{k=1}^{\infty} h(c_k) \cdot c_k$.

Konvergenz der Reihe: Setze in $|h(v)| \leq \|h\| \cdot \|v\| : v = \sum_{k=1}^{n} h(c_k)\, c_k$.
Dann:

$$\begin{aligned} h(v) &= \sum_{k=1}^{n} h(c_k) \cdot h(c_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} h(c_k)^2 \\ &\leq \|h\| \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} h(c_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

also

$$\left(\sum_{k=1}^{n} h(c_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|h\|,$$

also

$$\sum_{k=1}^{\infty} h(c_k)^2 \leq \|h\|^2 < \infty.$$

Also A[4.1] anwendbar.

Dieses b tut es: Aus $b = \sum_{k=1}^{\infty} h(c_k)\, c_k$ durch Multiplikation mit c_ℓ:

$$\langle b, c_\ell \rangle = h(c_\ell).$$

Dann:

$$\begin{aligned}
\langle b, v \rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle b, c_k \rangle \; \langle v, c_k \rangle && \text{verallg. Parseval-Gleichung K[1.2].(iv)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} h(c_k) \; \langle v, c_k \rangle \\
&= h\left(\sum_{k=1}^{\infty} \langle v, c_k \rangle \; c_k \right) && \text{Stetigkeit von } h \\
&= h(v) && \text{K[1.2].(ii)}
\end{aligned}$$

■

G[4.1] Definition

Ein Banach-Raum W heißt *seperabel*, wenn es in ihm ein <u>totales</u> Vektorsystem $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gibt, d.h. die Menge der endlichen Linearkombinationen der t_k ist dicht in W.

H[4.1] Lemma

Ein seperabler Hilbert-Raum besitzt stets ein maximales ON-System.

Beweis

Orthonormalisiere (t_k) zu (c_k) und wende K[1.2] an. ■

I[4.1] Darstellungssatz von Riesz

Ist V ein seperabler Hilbert-Raum, so existiert zu jeder stetigen Linearform $h : V \to \mathbb{R}$ genau ein $b \in V$ mit

$$h(v) = \langle b, v \rangle \quad \forall\, v \in V \tag{4.2}$$

Beweis

Kombination von H[4.1] und F[4.1] ■

Index